Bloque 05. Tema 5.

Geometría Euclídea.

ÍNDICE

1) INTRODUCCIÓN. XX SIGLOS DE GEOMETRÍA

El tema que vamos a comenzar hace referencia a la geometría clásica o euclídea.

Unas pinceladas históricas a lo mejor te pueden interesar para animarte en el esfuerzo de comprender y disfrutar del conocimiento que tantas mentes brillantes nos han regalado.

La historia nos hace pensar, que los egipcios ya conocían muchos de los postulados de la geometría clásica 2700 años a.C., los plasmaron en sus impresionantes construcciones como las mastabas y con posterioridad las pirámides más evolucionadas de caras lisas, de la Dinastía IV (2500 a. C.), las pirámides de Keops, Kefren, y Micerino.

Sin embargo los primeros desarrollos de la geometría y, en general, de las matemáticas de manera sistemática, podemos decir que se encuentran alrededor de la cultura helénica, en la Grecia Antigua, sobre el año 600 a.C.

Pero un hito en el desarrollo general de la geometría y las matemáticas, habrá que situarlo en el 300 a.C. con la aparición del libro de Euclides llamado ***Los Elementos*** (una de sus cinco obras que han llegado hasta nuestros días), cuya influencia en la historia ha sido extraordinaria, siendo durante más de 20 siglos la guía de la enseñanza de la geometría básica, la cual estudiamos ajenos a su historia y, quizá con menos entusiasmo que lo haría un estudiante de la Biblioteca de Alejandría.

¿Por qué es tan importante el libro de los Elementos de Euclides?

La trascendente tarea de Euclides está en recoger y estructurar el patrimonio matemático griego bajo una relación lógica de sus elementos.

Así, más que crear unas matemáticas nuevas (*lo que habían hecho un brillante grupo de matemáticos anteriores Tales, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, Arquitas, y sobre todo los de la Academia de Atenas, Teeteto, Eudoxo, Menecmo, Dinostarto, que bajo la dirección matemática y filosófica platónica realizaron el llamado «milagro griego» en Matemáticas*), a Euclides le cabe el inmenso mérito de la ordenación y sistematización de la Geometría griega elemental, de manera que con independencia de sus aportes originales, su mayor contribución se le reconoce como gran recopilador y creador de un estilo de exposición –el método axiomático–, de modo que en lenguaje actual diríamos que Euclides es un gran maestro y su obra fundamental un Libro de Texto, que establece un modelo de exposición y de demostración en Matemáticas, una especie de norma académica de obligado respeto para todo matemático.

En el tema que desarrollamos seguidamente solo se estudian algunas de las proposiciones y teoremas euclídeos la mayoría sin demostración (sin fundamentación sobre los postulados).

Todas las proposiciones y teoremas, tienen su demostración. El interesado puede visitar la siguiente página web.

http://newton.matem.unam.mx/geometria

De manera general del libro de los Elementos veremos algunas:

- **<u>Definiciones</u>. F**rases breves y precisas con las que se *introducen los conceptos* matemáticos y se da *nombre a los diversos elementos geométricos* que intervienen en las proposiciones.

  D.I.1. Punto es lo que no tiene partes.

  D.I.2. Línea es la longitud sin anchura.

  D.I.3. Los extremos de la línea son puntos.

  D.I.4. Línea recta es la que yace por igual sobre sus puntos.

  D.I.5. Superficie es lo que sólo tiene largo y ancho.

  D.I.6. Los extremos de la superficie son líneas.

  D.I.7. Superficie plana es la que yace por igual sobre sus rectas.

  D.I.8. Angulo plano es la inclinación de dos líneas que se encuentran en un plano y no yacen las dos sobre una recta.

  D.I.9. Si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.

  D.I.10. Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.

  D.I.11. Ángulo obtuso es el mayor que el recto.

  D.I.12. Ángulo agudo es el menor que el recto.

- **<u>Axiomas</u>. V**erdades autoevidentes comunes a todas las ciencias.

  NC1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

  NC2. Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.

  NC3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

  NC4. Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí.NC5. El todo es mayor que la parte.

- **<u>Postulados</u>. Ve**rdades menos obvias que se refieren solamente *a la materia concreta de que se trate*, en este caso a la Geometría.

  P1. [Es posible] trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

  P2. [Es posible] prolongar de una manera ilimitada en línea recta una recta limitada.

  P3. [Es posible] describir un círculo para cada centro y cada radio.

  P4. Todos los ángulos rectos son iguales.

  P5. Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.

- **<u>Proposiciones</u>. E**nunciados que se demuestran a partir de las proposiciones anteriores y las asunciones aceptadas en Postulados y Axiomas.

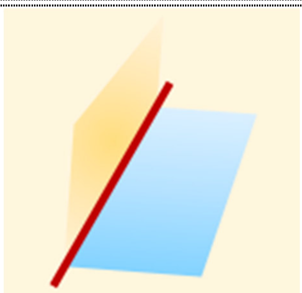
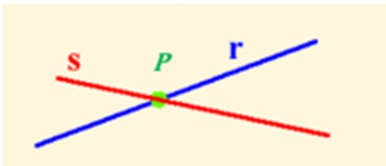
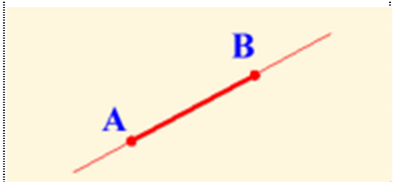
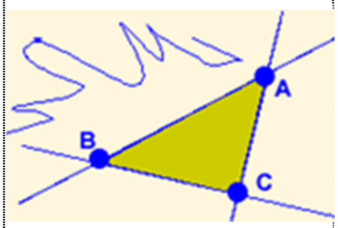
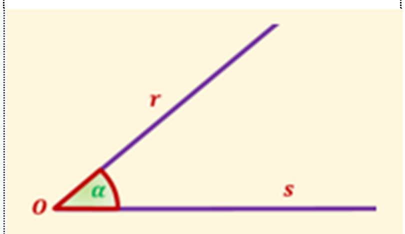
2) PUNTOS, RECTAS, PLANOS

Comencemos con una de las primeras 23 definiciones de Euclides:

(D.I.1). Punto es lo que no tiene partes.

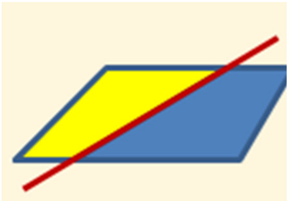
- Partimos de la existencia de infinitos puntos cuyo conjunto llamamos **ESPACIO**.
- Los puntos del espacio los podemos agrupar en conjuntos parciales formados por infinitos puntos, a los que denominaremos **Planos.**
- Dentro de un plano, podemos hacer agrupaciones de infinitos puntos a los que vamos a denominar **RECTAS.**

Estos tres conceptos construidos por la imaginación humana se relacionan entre sí de la siguiente manera.

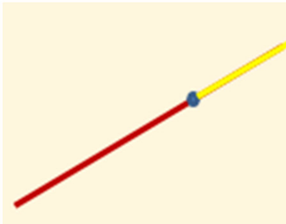
Dos planos que se cortan determinan una recta (r)	Dos rectas que se cortan determinan un punto (P)	Dos puntos unidos representan un segmento y prolongado por sus extremos una recta.
		
Tres puntos no alineados determinan un plano.	Dos rectas que se cortan determinan un ángulo plano.	
		

De las expresiones anteriores podemos deducir:

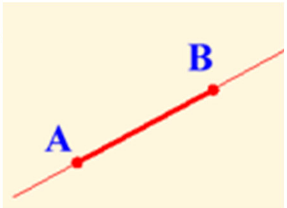
Una sola recta divide al plano que la contiene en dos partes iguales llamadas **semiplanos**.



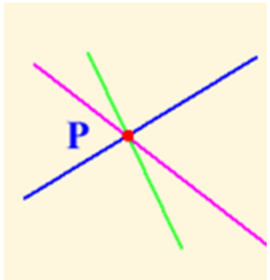
Un punto sobre una recta, divide a dicha recta en dos partes iguales llamadas **semirrectas**.



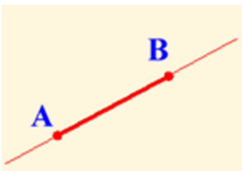
Dos puntos señalados sobre una recta definen un **segmento de recta**.



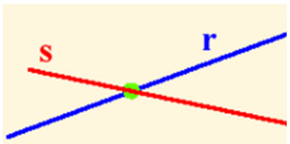
Por un punto pueden pasar infinitas rectas.



Por dos puntos sólo puede pasar una recta.

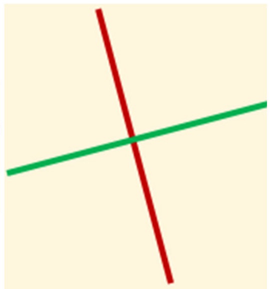


Dos rectas son secantes cuando tienen un solo puto común.



Dos rectas paralelas no tienen ningún punto en común.

Dos rectas se dicen perpendiculares si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales (cada uno de ellos es recto), y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.



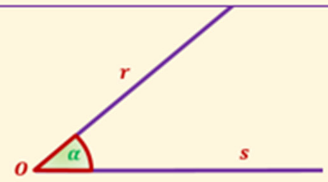
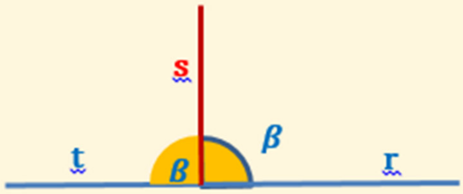
Ejercicio 1

Selecciona las respuestas correctas.

	Todas las rectas secantes son perpendiculares.
	Todas las rectas perpendiculares son secantes
	Las rectas paralelas sólo tienen un punto en común
	Un ángulo define una porción infinita de plano
	El matemático griego que recopila el conocimiento antiguo de su época fue Pitágoras
	A la geometría clásica también le llamamos Euclídea
	Antes de la cultura helenística (600 a.C) no existía la matemática

3) ÁNGULOS

Las definiciones euclidianas sobre ángulos.

D.I.8. Angulo plano es la inclinación de dos líneas que se encuentran en un plano y no yacen las dos sobre una recta. **D.I.9. Si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.**	
D.I.10. Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó. **D.I.11. Ángulo obtuso es el mayor que el recto.** **D.I.12. Ángulo agudo es el menor que el recto.**	

En la geometría griega no se utilizaba el concepto de grado como unidad de medida de los ángulos. La única medida de ángulo considerada era el ángulo recto definido por perpendicularidad, como uno de los ángulos iguales que se forman al interseccionar dos rectas.

(La utilización de medidas del ángulo se vendrá posteriormente con Hiparco y Ptolomeo).

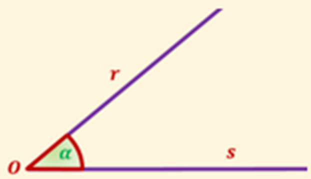
Al punto de intersección de las semirrectas que definen el ángulo se le llama vértice del ángulo. (O)

A las semirrectas Or y Os, se les denomina lados del ángulo.

Un ángulo como el de la figura se puede simbolizar de las siguientes formas:

Un ángulo como el de la figura se puede simbolizar de las siguientes formas:

- Definiendo el vértice y las semirrectas de los lados. $\widehat{rOs}$
- Nombrando el vértice del ángulo. $\widehat{O}$
- Mediante una letra griega. α.

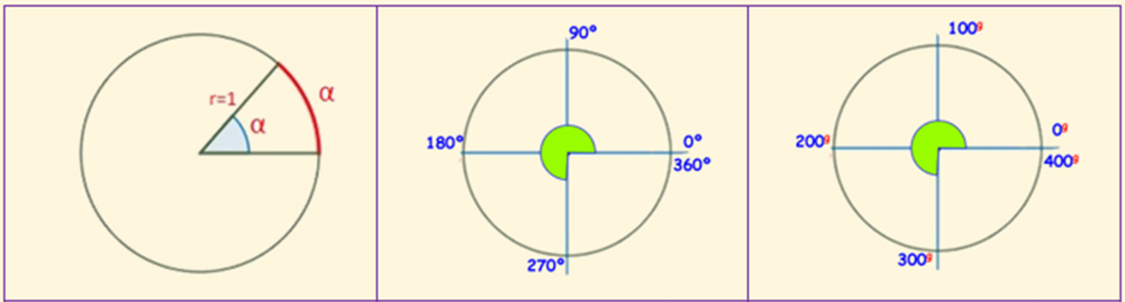


En el campo de la geometría es frecuente la utilización del alfabeto griego clásico para la definición de los elementos geométricos por ello insertamos la tabla siguiente:

Nombre de la letra:	Minúscula	Mayúscula	Nombre de la letra:	Minúscula	Mayúscula
Alfa	α	Α	*Nu*	ν	Ν
Beta	β	Β	*Xi*	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	*Ómicron*	ο	Ο
Delta	δ	Δ	*Pi*	π	Π
Épsilon	ε	Ε	*Rho(ro)*	ρ	Ρ
Zeta	ζ	Ζ	*Sigma*	σ	Σ
Eta	η	Η	*Tau*	τ	Τ
Theta (tita)	θ	Θ	*Ípsilon*	υ	Υ
Iota	ι	Ι	*Phi (fi)*	φ	Φ
Kappa	κ	Κ	*Ji o Chi*	χ	Χ
Lambda	λ	Λ	*Psi*	ψ	Ψ
Mu	μ	Μ	*Omega*	ω	Ω

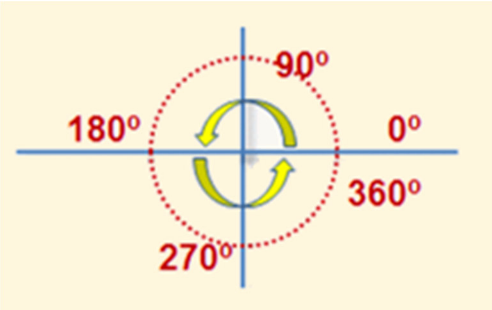
Existen diferentes unidades de medida de ángulos: el **grado centesimal** (gradian), el grado **sexagesimal** y el **radian,** que es la unidad de medida en el sistema internacional de unidades.

Según la unidad utilizada, el ángulo completo de una circunferencia tomará distintos valores.

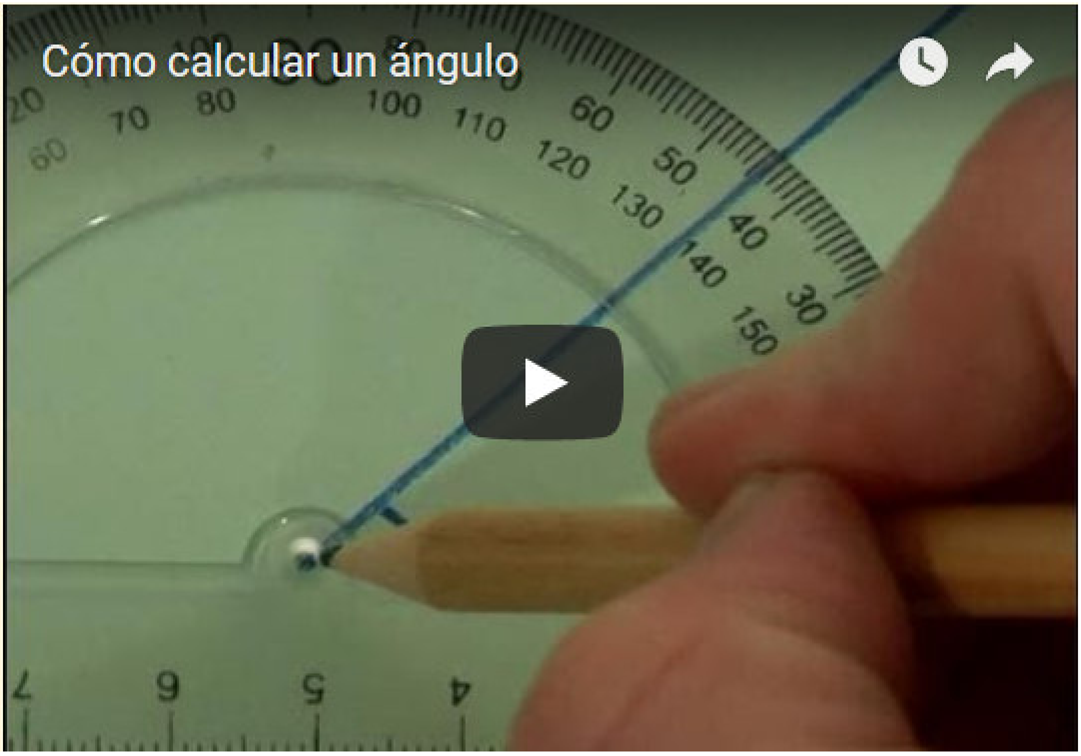


Radianes.(θ=2.π) | Sexagesimal. (θ=360º) | Centesimal. .(θ=400ᵍ)

Por convenio los ángulos se miden en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, los ángulos positivos son antihorarios y los negativos horarios.



En este vídeo puedes aprender a medir y trazar ángulos con la ayuda de un transportador de ángulos.



Vídeo nº 1. ¿Cómo calcular un ángulo?
Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=V7R2Yf00uBs&feature=youtu.be

3.1) SISTEMA SEXAGESIMAL

Sistema sexagesimal.

- Es un antiguo sistema de numeración de carácter posicional de potencias de 60, es decir, que la base de numeración tenía 60 dígitos diferentes.
- En el sistema sexagesimal de ángulos utilizamos como unidad de medida el grado.

El ángulo **completo** tiene un valor de 360º, el **llano** de 180º y el **recto** de 90º

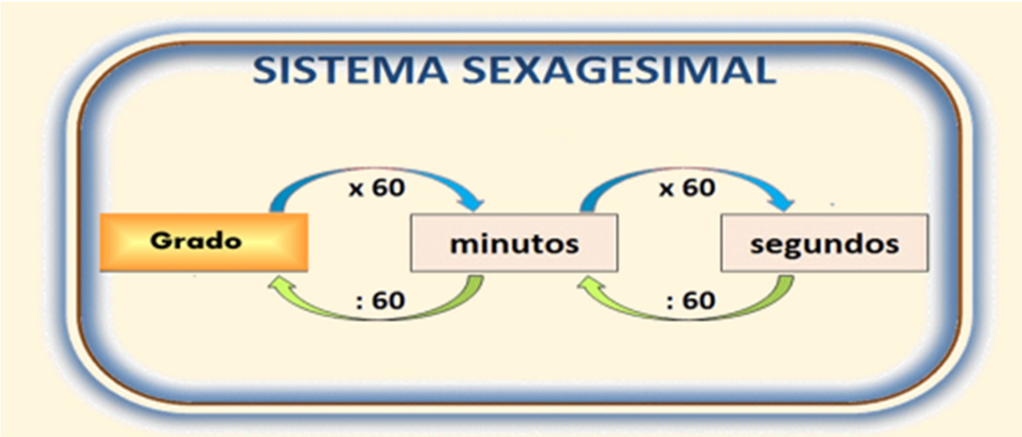
Si bien la unidad de medida es el grado **(°)**, actúan como submúltiplo el minuto de arco o **arcominuto** y el segundo de arco o **arcosegundo**.

(arco-minuto y arco-segundo no tienen ninguna relación con la medida del tiempo, son medidas de ángulos).

Para pasar de una unidad a otra deberemos tener en consideración las equivalencias entre la unidad y sus submúltiplos:

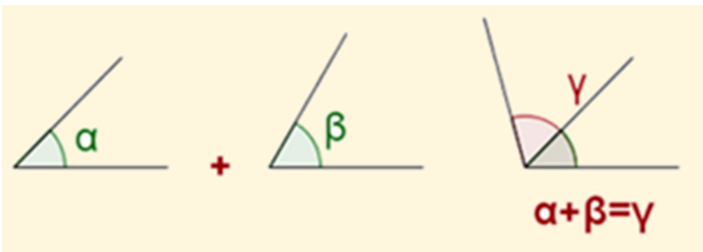
1° equivale a **60** minutos de arco. **1° = 60'**.

1' equivale a 60 segundos de arco. **1'=60"**



Suma de ángulos

La suma de dos ángulos es otro ángulo cuya amplitud es la suma de las amplitudes de los dos ángulos iniciales.

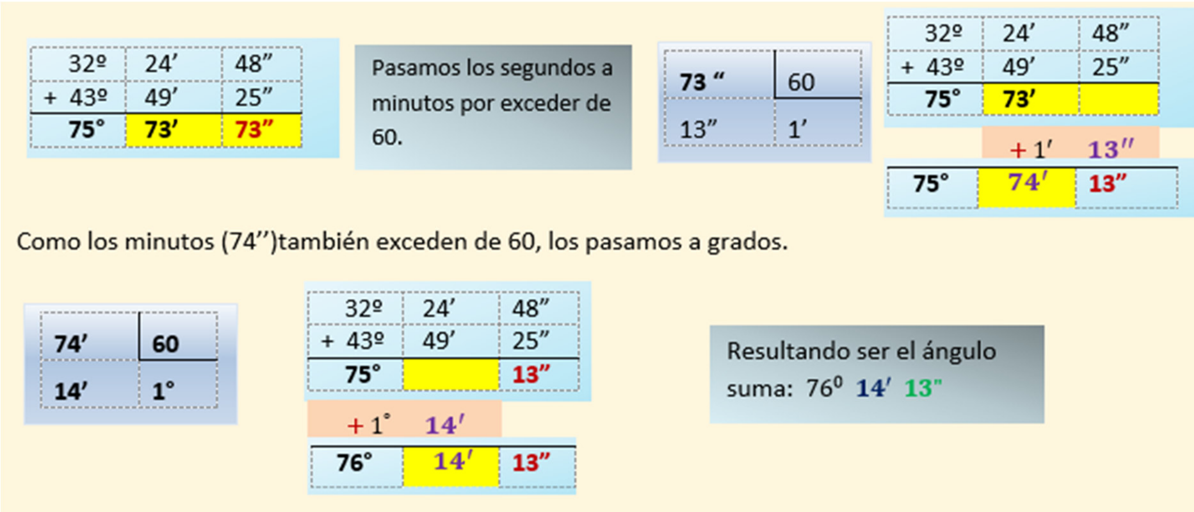


Numéricamente procedemos del siguiente modo:

1) Para **sumar ángulos** se colocan los **grados** debajo de los **grados**, los **minutos** debajo de los **minutos** y los **segundos** debajo de los **segundos** y **se suman.**
2) Si los **segundos suman más de 60**, se **divide** dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el **cociente** se añadirán a los **minutos.**
3) Si los minutos también excediesen de 60 dividiríamos dicho número entre 60, el resto serán minutos y el **cociente** se añadirán a los **grados.**

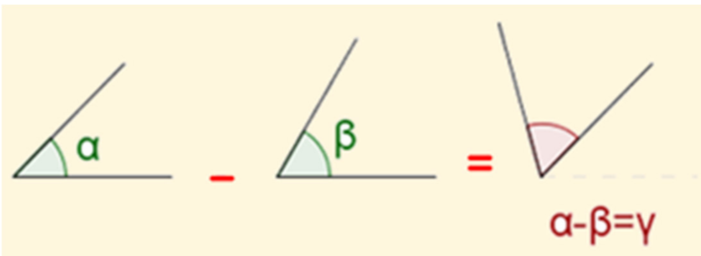
Veamos un ejemplo:

Suma los ángulos α de 32º 24’ 48”, con el ángulo β de 43º 49’ 25”



Resta de ángulos

La resta de dos ángulos es otro ángulo cuya amplitud es la diferencia entre la amplitud del ángulo mayor y la del ángulo menor.

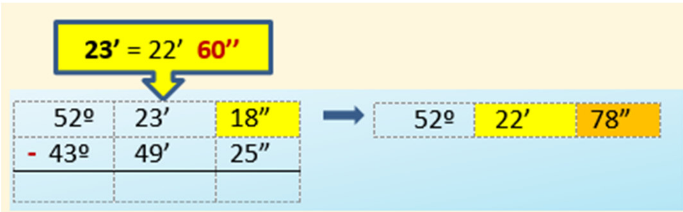


Numéricamente procedemos del siguiente modo:

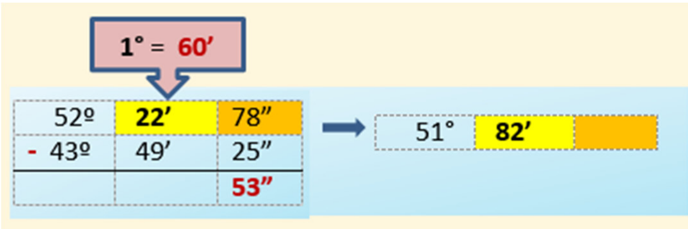
1) **Para** restar ángulos **se colocan los** grados **debajo de los** grados**, los** minutos **debajo de los** minutos **y los** segundos **debajo de los** segundos**.**
2) Si el cardinal del minuendo es menor que el cardinal del sustraendo**, convertimos un minuto del ángulo del minuendo en 60 segundos y se lo** sumamos a los segundos iniciales del ángulo del minuendo. A continuación restamos los segundos.
3) Si los minutos **del minuendo fuesen inferiores a los minutos del sustraendo, transformaríamos un grado en minutos,** se los sumaríamos a los minutos que tengamos en el minuendo y proseguimos la resta.

Veamos un ejemplo:

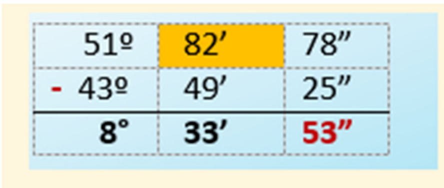
Resta al ángulos α de 52º 23’ 18”, el ángulo β de 43º 49’ 25”



Los segundos de arco del minuendo son menores que los segundos de arco del sustraendo. Hacemos la siguiente modificación: **23’**= 22’, **60’’** modificando de esta forma el ángulo del minuendo pudiendo comenzar la resta de valores.

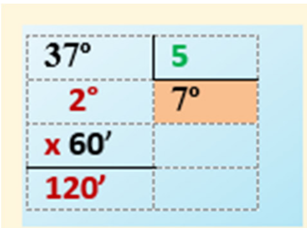


Como resulta que los minutos de arco del minuendo (22’) son mayores que los minutos de arco del sustraendo (49’), procedemos a realizar la siguiente modificación: **1°** = 60’, que nos permite avanzar y finalizar la resta, siendo el resultado final de: **8° 33’ 53”.**



Multiplicación de ángulos

La **multiplicación** de un **número por un ángulo** es otro ángulo cuya **amplitud es la suma** de tantos **ángulos iguales al dado** como indique el número.



Numéricamente procedemos del siguiente modo:

La **multiplicación** de un **número por un ángulo** es otro ángulo cuya **amplitud es la suma** de tantos **ángulos iguales al dado** como indique el número por el que se multiplica.

Numéricamente procedemos del siguiente modo:

1º) Multiplicamos los segundos, minutos y grados por el número.

2º) Si los cardinales de las unidades de los segundos sobrepasan el número 60, se realizará la conversión pertinente de segundos a minutos, dividiendo para ello por 60. El cociente de dicha división representa minutos mientras que el residuo de la misma son segundos.

3º) Se hace lo mismo para los minutos.

Veamos un ejemplo:

Multiplica el ángulo α de 32º 23’ 49” por cinco.

32°	23’	48”
	x	5
160°	115’	245”

Como los minutos y segundos exceden de 60 tendremos que pasar parte de este valor a una unidad superior para ello dividiendo por 60, comenzando por los segundos.

Por lo que podemos decir que **245’’ = 4’, 5’’** quedando el ángulo modificado como: **160° 119’ 5’’**

245”	60
5”	4’

160°	115’	
+	4’	5”
160°	119’	5”

Repetimos el proceso para los minutos por superar estos el valor de 60.

Resultando que **119’ = 1° 59’.**

Quedando definitivamente el ángulo con un valor de **161° 59’ 5’’**

119’	60
59’	1°

160°		5”
+ 1°	59’	
161°	59’	5”

División de ángulos.

La **división de un ángulo** por un **número** es hallar otro **ángulo** tal que multiplicado por ese número da como resultado el **ángulo** original.

37°	5
2°	7°
x 60’	
120’	

Numéricamente procedemos del siguiente modo:

1º) **Comenzamos dividiendo el cardinal de los grados por el número dado (divisor).**

2º) El cociente de la división son los grados y **al resto o residuo lo multiplicamos por 60**, para transformarlo en minutos.

3º) Se añaden estos minutos a los que tenía el ángulo inicial y se divide el número de minutos resultante por el divisor dado, transformando los minutos del residuo de la visión en segundos.

4º) Se añaden estos segundos a los que tenía el ángulo inicial y se divide el número de segundos resultante por el divisor dado.

Veamos un ejemplo:

Divide el ángulo α de 37º 48’ 25” en cinco partes.

Comenzamos dividiendo los grados del ángulo inicial. Los dos grados del resto los pasamos a minutos y se los sumamos a los minutos del ángulo inicial para a continuación dividir de nuevo por cinco.	37º | 5 2º | 7º x 60’ 120’	120’ +48’= 168’ | 5 3’ | 33’ x 60’ 180’’
Los tres minutos del resto los pasamos a segundos y se los sumamos a los segundos del ángulo inicial para a continuación dividir de nuevo por cinco.	180’’ +25’’= 205’’ | 5 5’’ | 41’’	**Resultando el valor final del ángulo de 7º 33’ 41’’ con un resto de 60 décimas de arco.(5’’.60/5).**

Ejercicio 2

¿Cuál es el nombre de las siguientes letras griegas?

π	
α	
γ	
β	
λ	
μ	
ω	

Ejercicio 3

Realiza las siguientes operaciones con ángulos.

35º 33' 54'' + 7º 42' 25'' = ______ º ______ ´ ______ “

3.2) SISTEMA INTERNACIONAL. EL RADIÁN

Se denomina **radian** (rad), al ángulo central (*ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia*) y cuyos lados determina sobre la misma un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

Como la longitud de la circunferencia es **L=2.Π.r**, podremos decir que el ángulo completo equivale a:

$$\theta_{rad} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ (\text{rad})$$

De la misma forma diríamos que el ángulo **llano** tiene π radianes o que el ángulo **recto** tiene π**/2** radianes.

Para pasar de grado a radianes plantearemos la siguiente proporción:

$$\frac{\theta_{rad}}{\theta^\circ} = \frac{2\pi}{360^\circ} \longrightarrow \theta_{rad} = \frac{2\pi}{360^\circ} . \theta^\circ$$

Para pasar de radianes a grado plantearemos la siguiente proporción:

$$\frac{\theta^\circ}{\theta_{rad}} = \frac{360^\circ}{2\pi} \longrightarrow \theta^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} . \theta_{rad}$$

Ejemplo. Si conocemos que el ángulo central α es igual a 36°. ¿Cuál será su valor en radianes?

$$\frac{\alpha_{rad}}{36^\circ} = \frac{2\pi}{360^\circ} \longrightarrow \alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360^\circ} . 36^\circ = \frac{\pi}{5}\ (rad)$$

Ejemplo. Si conocemos que el ángulo central β es igual a π/4 rad. ¿Cuál será su valor en grados?

$$\frac{\beta^\circ}{\pi/4} = \frac{360^\circ}{2\pi} \longrightarrow \beta^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} . \pi/4 = 45^\circ$$

Debemos observar que el **radian** representa la constante de razón entre el arco y el radio, por tanto es un número que carece de unidades, pues lo que nos indica es las veces que el arco contiene al radio.

La utilidad del radian estriba que tanto el ángulo como el arco que define contienen el mimos número de radianes. Luego cuando utilizamos el radian es indiferente referirnos al arco o al ángulo.

<u>Ejercicio 4</u>

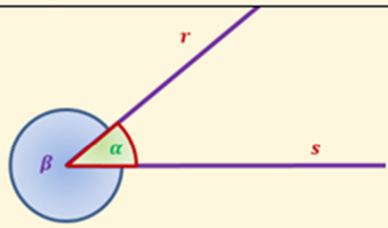
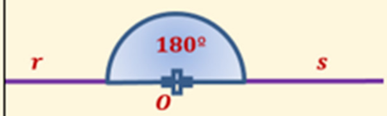
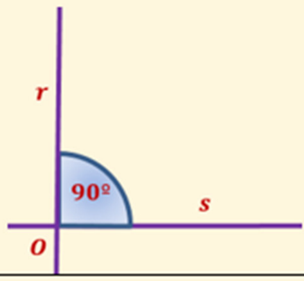
Determina el valor en radianes de los siguientes ángulos:

a) μ= 60º

b) β= 150º

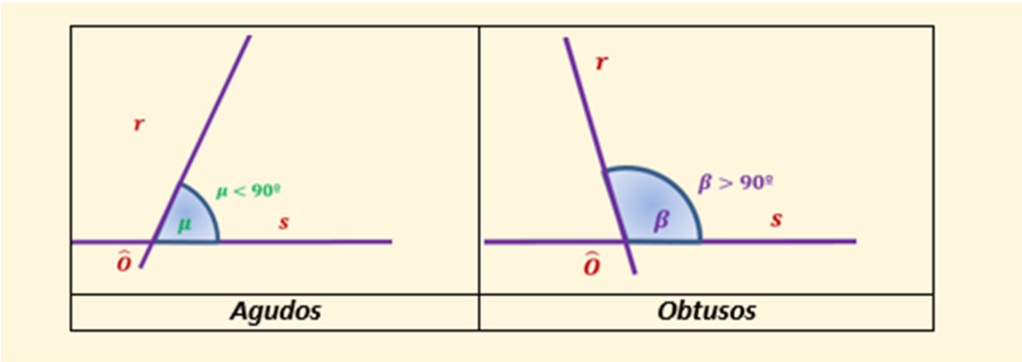
c) θ= 270º

3.3) <u>CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS</u>

• Llamaremos **ángulo completo** aquél que abarca todos los puntos del plano. El valor asignado es de **360º**	
• Dos semirrectas con origen común definen sobre el plano dos ángulos **α** (llamado ángulo **convexo)** y **β** (llamado ángulo **cóncavo**). La suma de un ángulo cóncavo con su convexo respectivo suman 360° grados. $\alpha + \beta = 360º$	
• Cuando el ángulo **cóncavo es igual al convexo,** le llamaremos **ángulo llano** y, en él, los lados del ángulo son semirrectas opuestas.	
• Cuando los lados de un ángulo son semirrectas perpendiculares, al ángulo formado le llamamos ángulo **recto.**	

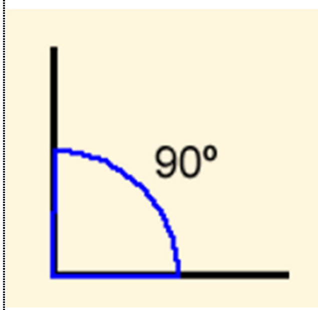
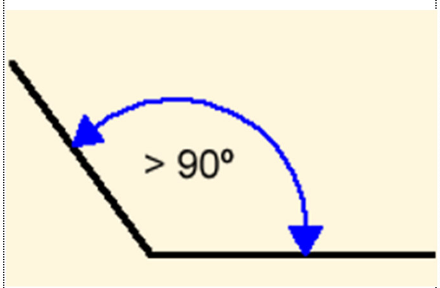
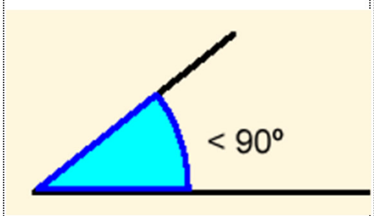
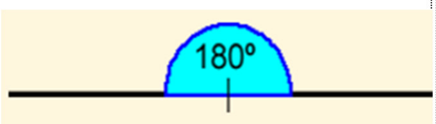
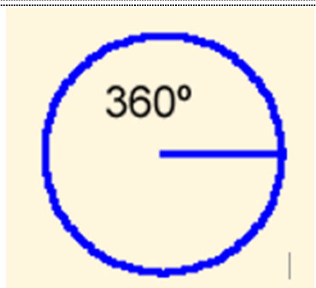
Si tomamos como referencia el ángulo de 90º, los ángulos los podemos denominar como:

- ***Agudos*** si son **menores** que un recto.
- ***Obtusos*** si son **mayores** que un recto.



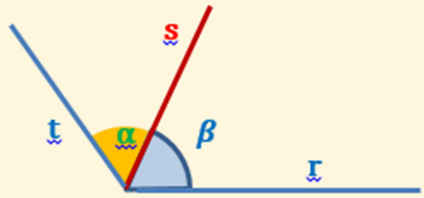
Ejercicio 5

¿Cómo se denominan estos ángulos?

		
____________________	____________________	____________________
		
	____________________	____________________

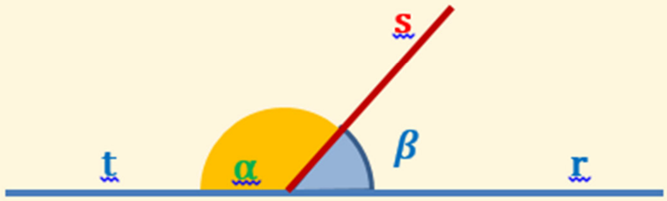
3.4) RELACIÓN ENTRE PAREJAS DE ÁNGULOS

Los ángulos emparejados también reciben nombres específicos, veamos cuales son:



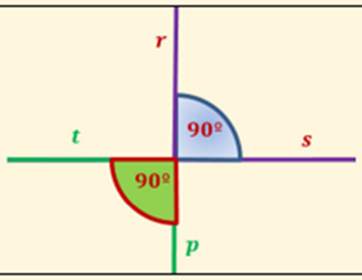
Ángulos **consecutivos:** aquellos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado en común.

α y β **consecutivos.**



Ángulos **adyacentes:** aquellos ángulos consecutivos en los que el lado no compartido son semirrectas opuestas.

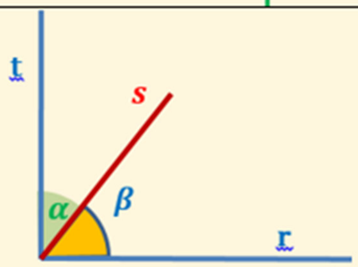
α y β **adyacentes.**



Ángulos **suplementarios:** aquellos ángulos cuya suma es el valor de un llano, es decir, 180º.

α + β son suplementarios si

$\alpha + \beta = 180°$



Ángulos **complementarios:** aquellos ángulos cuya suma es el valor de un recto, es decir, 90º.

α + β son complementarios si.

$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$

Ejercicio 6

Indica si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:

Dos ángulos adyacentes son aquellos que:

	V / F
Suman 90°	
Suman 45°, tienen el vértice común, un lado común y los otros lados son uno prolongación del otro	
Siendo suplementarios, tienen el vértice común, un lado común y los otros lados son uno prolongación del otro	

Ejercicio 7

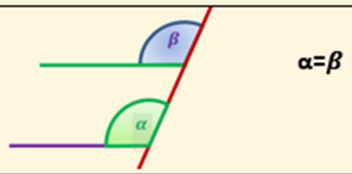
¿Qué podríamos decir que todos los ángulos adyacentes son consecutivos o que todos los ángulos consecutivos son adyacentes?

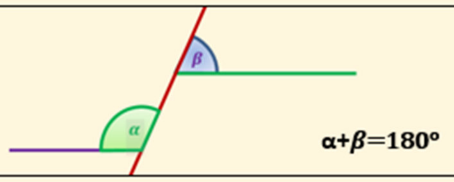
3.5) IGUALDAD ENTRE ÁNGULOS

Es muy importante saber que dos ángulos son iguales cuando cumplen alguna de las condiciones siguientes:

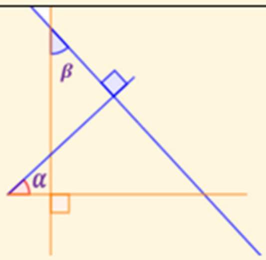
Dos ángulos que tienen sus lados paralelos entre sí, o son iguales o son suplementarios.

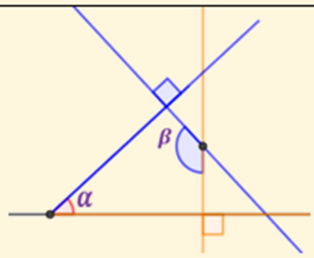
Proposición I.29. Una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí.



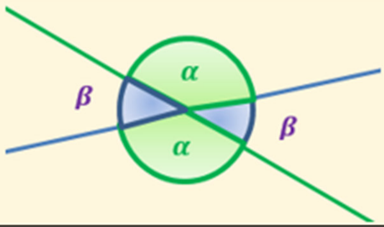


Dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares entre sí, o son iguales o son suplementarios.

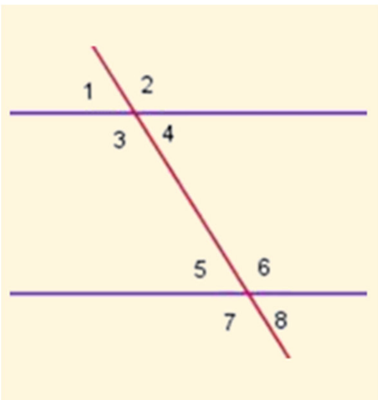




Proposición I.15. Si dos rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice que son iguales.



También tenemos que conocer que dos rectas paralelas cortadas por una tercera recta determinan ocho ángulos que guardan relación entre sí:



Atendiendo a su disposición respecto a las rectas los ángulos podemos caracterizarlos como:

- **Ángulos internos (3, 4, 5 y 6).** Los ángulos internos a un mismo lado de la transversal a dos rectas paralelas son **suplementarios.**

$$\hat{3}+\hat{5}=180^\circ=\hat{4}+\hat{6}$$

- **Ángulos externos (1, 2, 7 y 8).** Los ángulos externos a un mismo lado de la transversal a dos rectas paralelas son **suplementarios.**

$$\hat{1}+\hat{7}=180^\circ=\hat{2}+\hat{8}$$

- **Ángulos correspondientes:** Son aquellos que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.
  Los ángulos correspondientes son iguales.

$$\hat{2}=\hat{6};\ \hat{4}=\hat{8};\ \hat{1}=\hat{5};\ \hat{3}=\hat{7}$$

- **Ángulos alternos internos:** Son aquellos ángulos interiores que están a distinto lado de la transversal y a distinto lado de las paralelas.
  Los ángulos alternos internos son iguales.

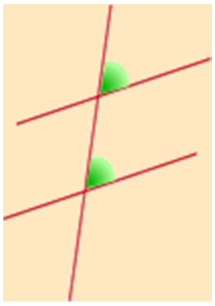
$$\hat{3} = \hat{6};\ \text{y}\ \hat{4} = \hat{5}$$

- **Ángulos alternos externos:** Son aquellos ángulos exteriores que están a distinto lado de la transversal y a distinto lado de las paralelas.
  Los ángulos alternos externos son iguales.

$$\hat{1} = \hat{8}\ \ \text{y}\ \hat{2} = \hat{7}$$

Ejercicio 8

Indica si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:



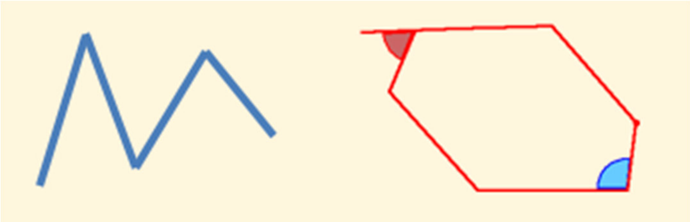
De los ángulos de la figura podemos decir que …..

	V / F
Son iguales por ser ángulos internos	
Son iguales por ser externos internos	
Ninguna de las anteriores es correcta	

4) POLÍGONOS

La línea de puntos formada por segmentos rectilíneos se les denomina poligonal.

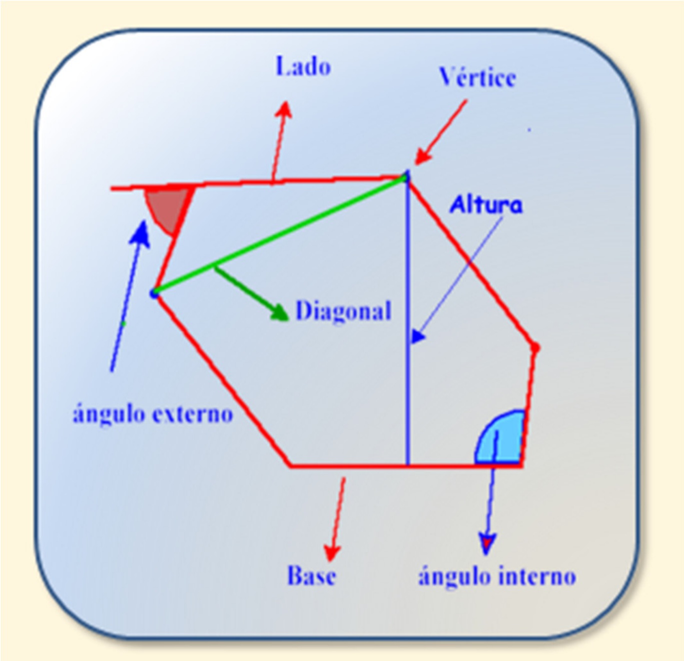
Las líneas poligonales pueden ser **abiertas** o **cerradas**.



Las líneas **poligonales cerradas** dan lugar a los **polígonos**, que podemos definirlos como el conjunto de puntos del plano delimitados por una línea poligonal cerrada. Por tanto, un polígono representa una superficie.

En un polígono podemos diferenciar diferentes elementos:

- ***Lados***: son los segmentos rectilíneos que lo delimitan.
- ***Ángulos interiores***: los que forman dos lados contiguos en el interior del polígono.
- ***Ángulos exteriores***: los que forman dos lados contiguos en el exterior del polígono.
- ***Vértices***: los puntos donde coinciden dos lados.
- ***Diagonales***: las rectas que unen dos vértices que no sean consecutivos.
- ***Base:*** es cualquiera de los lados (normalmente el lado en que se "apoya" la figura).
- ***Altura***: es el segmento perpendicular desde el vértice al lado opuesto o a su prolongación.



4.1) Clasificación de los Polígonos

Podemos clasificar a los polígonos atendiendo a **sus ángulos** o a sus **lados**.

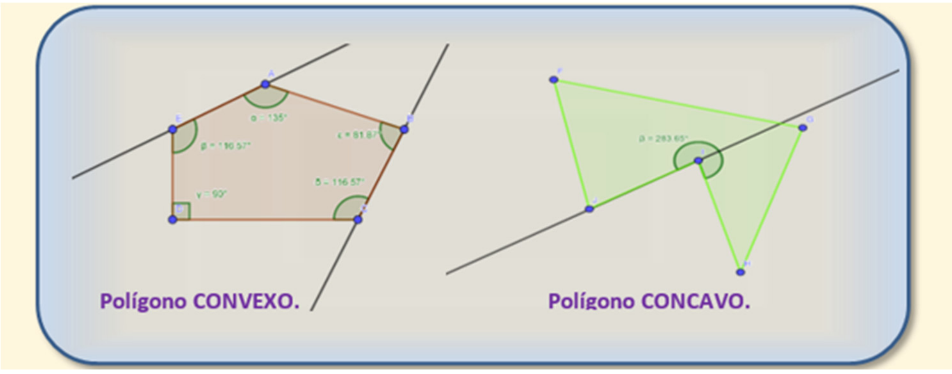
- **Según sus ángulos:** Pueden ser polígonos **cóncavos** o polígonos **convexos**.

  a) Un polígono es convexo cuando todos sus ángulos internos valen **menos de 180º**.

  En un polígono convexo, todos los lados están en el mimo semiplano que formaría la prolongación de cualquiera de los lados. Es decir, la prolongación de cualquier lado no divide al polígono.

  b) Un polígono es **cóncavo** cuando tiene *por lo menos un ángulo interno cóncavo o **mayor que 180º**.*

  En un polígono cóncavo encontraremos que la prolongación de algunos de los lados divide al polígono en dos partes.



- **Según sus lados:**

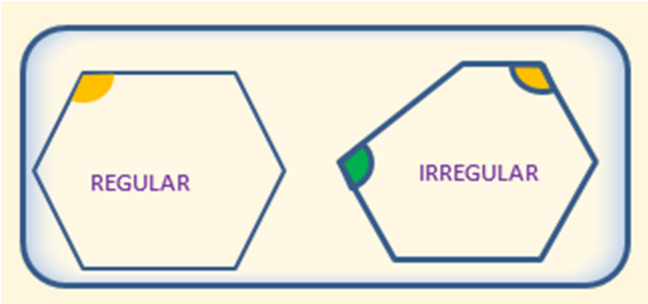
Los polígonos según el número de lados que lo forman reciben nombres diferentes.

Para poder cerrar un polígono necesitamos al menos tres lados porque con menos no puede delimitarse una superficie cerrada.

En la tabla siguiente están relacionados los nombres de los polígonos con su número de lados.

LADOS	NOMBRE	LADOS	NOMBRE
3	triángulo	17	Heptadecágono
4	cuadrilátero	18	octodecágono
5	pentágono	19	eneadecágono
6	hexágono	20	isodecágono
7	heptágono	30	triacontágono
8	octógono	40	tetracontágono
9	eneágono	50	pentacontágono
10	decágono	60	hexacontágono
11	endecágono	70	heptacontágono
12	dodecágono	80	octacontágono
13	Tridecágono	90	eneacontágono
14	tetradecágono	100	hectágono
15	pentadecágono	10^6	megágono
16	hexadecágono	10^{100}	googólgono

Cuando un polígono tiene sus **lados y ángulos iguales** se llaman polígono **REGULAR.** Si los lados y ángulos **no tienen la misma medida** se llaman polígono **IRREGULAR**.



En todos los polígonos **convexos** de "**n**" lados, tanto regulares como irregulares se verifica que:

- La suma de los ángulos internos del polígono valen: **s=180º.(n-2)**
- El número de diagonales del polígono será: **nº.diagonales=n.(n-3)/2**

Ejemplo.- Hallar la suma de los ángulos internos de un pentágono.

s =180º.(n-2)=180º.(5-2)=180º.3 =540º

Ejemplo.- Hallar el número de diagonales de un cuadrilátero.

nº.diagonales=n.(n-3)/2=4.(4-3)/2 =4/2 = 2

Ejercicio 9

¿Cuál será el valor mínimo que puede tener un ángulo Cóncavo?

Ejercicio 10

¿Cuál es el número de segmentos rectilíneos mínimos que se necesita para formar un polígono cerrado?

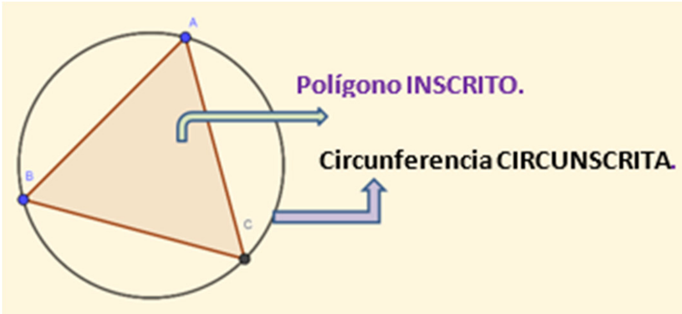
Si los segmentos rectilíneos sólo pueden unirse por sus extremos, para cerrar un polígono, ¿podrán ser estos segmentos de la longitud que se desee o tendrá que cumplir alguna condición?

4.2) POLÍGONOS REGULARES

Sabemos que son aquellos que tienen ***todos sus lados y ángulos iguales***.

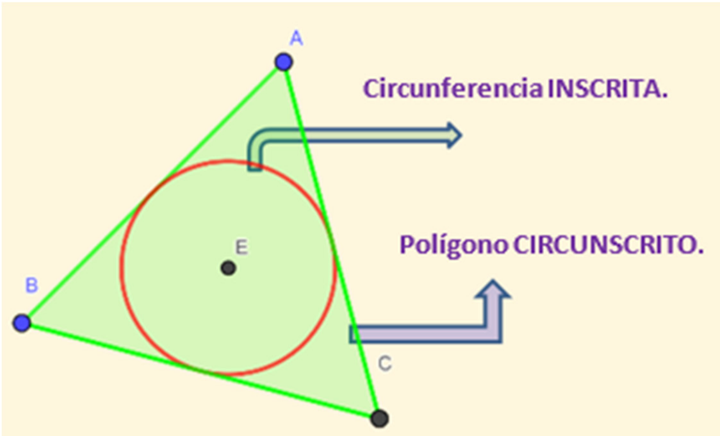
En todo polígono regular se puede trazar una circunferencia que pase por todos sus vértices llamada circunferencia circunscrita al polígono.

También se dice que el **polígono** está **inscrito** en la circunferencia.

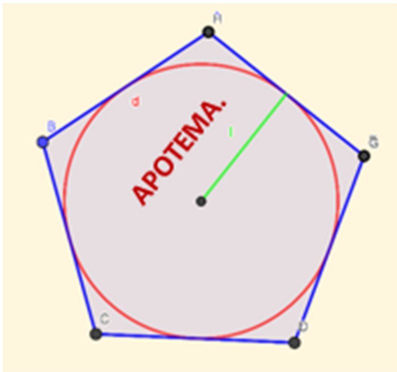


Dado un polígono regular también podremos trazar una circunferencia que sea tangente a todos sus lados, llamada **circunferencia inscrita.**

También se dice que el **polígono** circunscribe a la circunferencia.



Denominamos **apotema** de un polígono regular, a la distancia medida perpendicularmente desde el centro del polígono a uno de sus lados. *La apotema es el radio de la circunferencia inscrita en el polígono.*

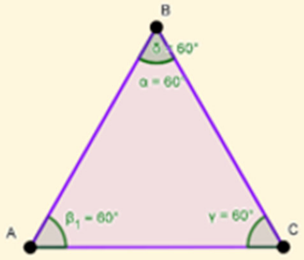
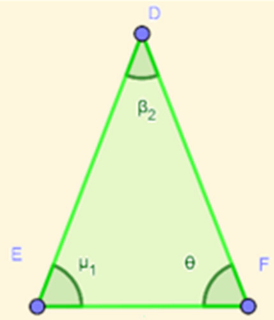
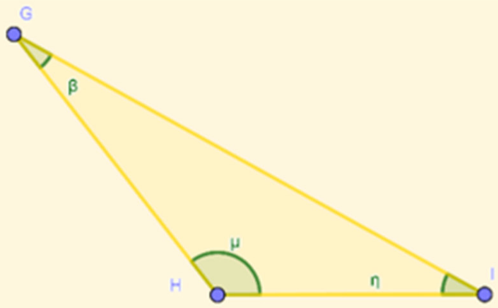


4.3) TRIÁNGULOS

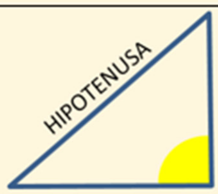
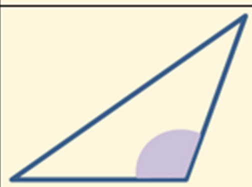
El triángulo es el polígono cerrado de menor número de lados. Está formado por tres lados y tres ángulos.

Podemos clasificarlos atendiendo a la **longitud de sus lados** o al valor de **sus ángulos**.

- **Según sus LADOS los triángulos se clasifican en:**

Equilátero: cuando tienen los tres lados iguales y los tres ángulos internos iguales. Cada ángulo interno mide 60º.	
Isósceles: cuando tienen dos lados iguales. Los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales entre sí.	
Escaleno: cuando tienen los tres lados desiguales. Los ángulos son también desiguales.	

- **Según sus ÁNGULOS los triángulos se clasifican en:**

Triángulo acutángulo. Tiene tres ángulos agudos.	**Triángulo rectángulo** Tiene un ángulo recto. El lado mayor es la hipotenusa. Los lados menores son los catetos.	**Triángulo obtusángulo** Tiene un ángulo obtuso.
		

Algunas de las propiedades más importantes a destacar del triángulo son:

- Es el único polígono cerrado que carece de diagonales.
- Todo polígono mayor de 3 lados puede triangularizarse, es decir, dividirse en al menos **n-2** triángulos (n número de lados del polígono que se triangulariza).
- la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es siempre 180°, lo que equivale a π radianes.

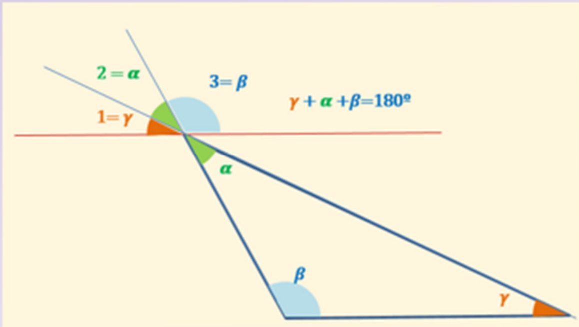
Si observamos la figura, el ángulo 1 es del mismo valor que el ángulo γ pues tienen sus lados paralelos a este.

El ángulo 2 es igual al ángulo α por ser ángulos opuestos por el vértice.

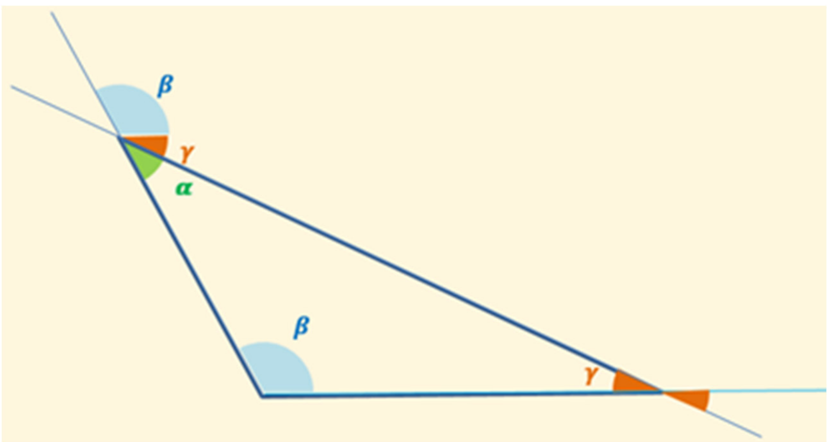
El ángulo 3 es igual al ángulo β por tener sus lados paralelos.

La suma de los ángulos **$1+2+3=\alpha+\beta+\gamma=180$.**

Con lo cual quedaría demostrado que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, es decir, 180°.

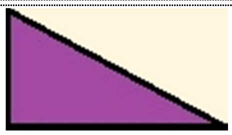
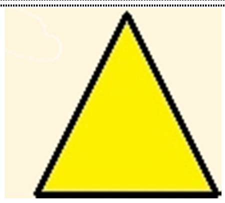
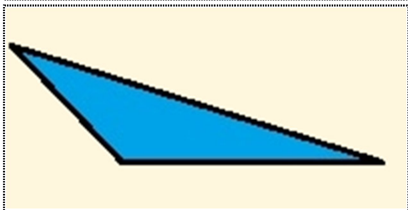
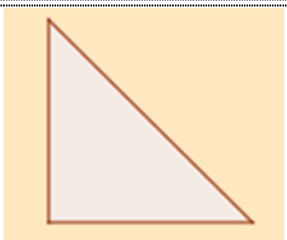


- La longitud de cada lado del triángulo es **menor que la suma** de los otros lados y **mayor que la diferencia** de los mismos. **Desigualdad triangula**r.
- Los triángulos son los únicos polígonos siempre convexos, no pueden ser cóncavos, dado que ninguno de sus tres ángulos puede superar los 180° grados o π radianes.
- En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
- El ángulo exterior de un triángulo (formado por un lado y la prolongación de otro), es igual a la suma de los dos ángulos no adyacentes al ángulo o igual a la suma de los interiores opuestos.



Ejercicio 11

Clasifica los siguientes triángulos atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

TRIÁNGULO	SEGÚN SUS LADOS	SEGÚN SUS ÁNGULOS
		
		
		
		
		

Ejercicio 12

¿Cuantos ángulos obtusos puede tener un triángulo?

	a) Como mucho uno
	b) No puede tener ninguno
	c) Como mucho dos

4.3.1) RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Son aquellas rectas que pasan o definen puntos especiales relacionados con las propiedades o características de los triángulos.

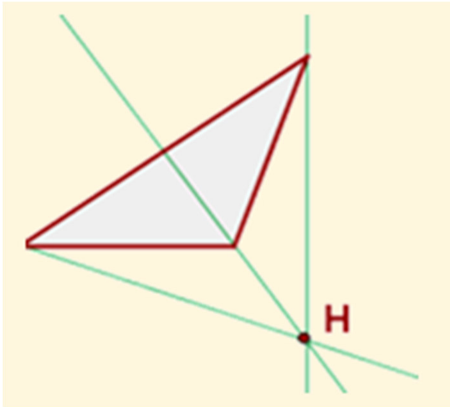
Así tenemos:

Rectas que definen **la altura** de un triángulo.

Son cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice del triángulo a su lado opuesto o su prolongación.

Las tres alturas interseccionan en un punto llamado **Ortocentro.**

El ortocentro es un punto interior si el triángulo es acutángulo, o un punto exterior si el triángulo es obtusángulo. Si es rectángulo está en el vértice del ángulo recto.



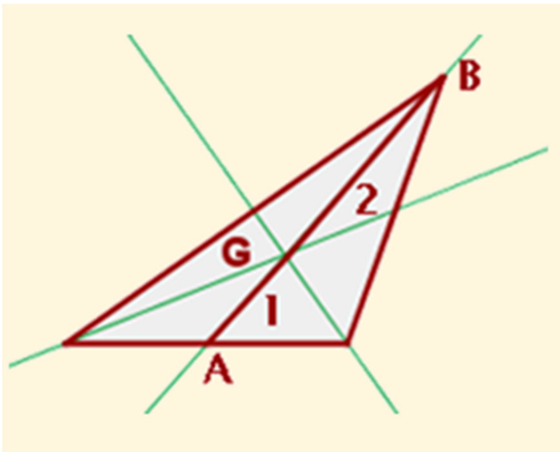
Medianas de un triángulo.

Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

El **Baricentro** es el punto de corte de las tres medianas.

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto. Por ello se dice que el baricentro dista 1/3 de la base y 2/3 de la altura. **BG = 2GA**

El Baricentro representa el centro de gravedad del triángulo. *El baricentro es siempre un punto interior.*

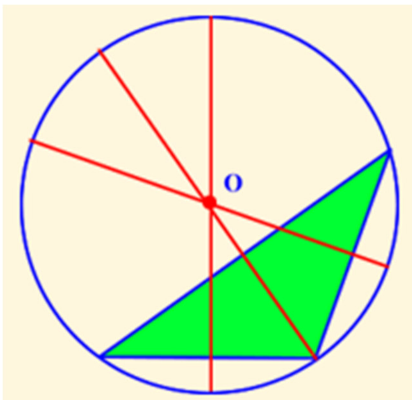


Mediatrices de un triángulo

Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

El Circuncentro, es el punto de corte de las tres mediatrices y centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo,

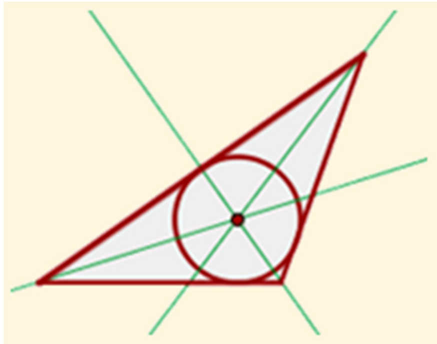
Es un punto interior si el triángulo es acutángulo, exterior si el triángulo es obtusángulo y, si es rectángulo está en el punto medio de la hipotenusa.



Bisectrices de un triángulo.

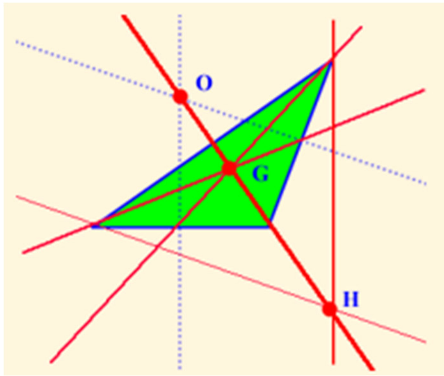
Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

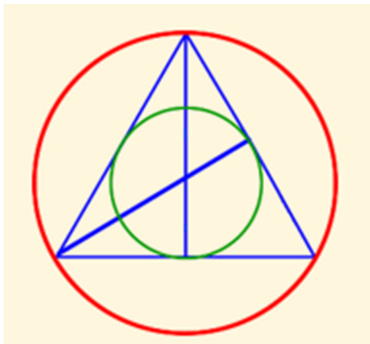
El Incentro, es el punto de corte de las tres bisetrices. Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.



Recta de Euler

El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados; es decir, pertenecen a la misma recta, llamada recta de Euler.



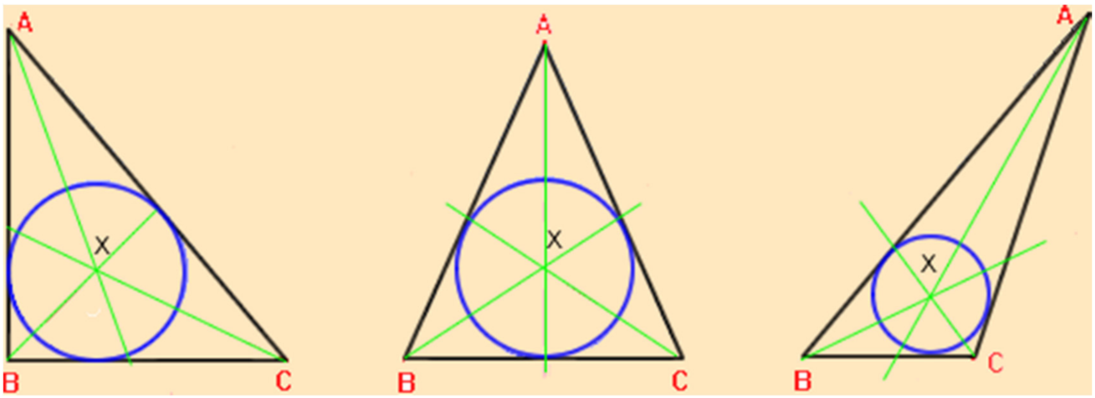


Si el triángulo fuese equilátero coincidirían en un mismo punto, otocentro, baricentro, circuncentro e incentro.

Además, el baricentro divide la distancia del ortocentro al circuncentro en la **razón 2:1**.

Ejercicio 13

Analizando los triángulos siguientes podríamos decir que el punto x es:



	a) El Ortocentro del triángulo por ser sus lados tangentes a la circunferencia inscrita.
	b) El Icentro del triángulo, por encontrase siempre en el interior del triángulo.
	c) El circuncentro del triángulo por ser el centro de la circunferencias inscrita.

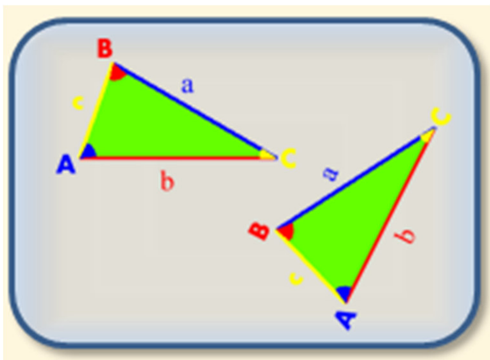
Ejercicio 14

¿Por qué el Icentro de un triángulo siempre es un punto interior al mismo y nunca exterior?

4.3.2) CONGRUENCIAS DE TRIÁNGULOS

Nace del axioma o noción común 4 del libro I de Los Elementos.

NC4. Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí.



Dos figuras geométricas **son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma** sin importar su posición u orientación.

Las partes coincidentes de las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

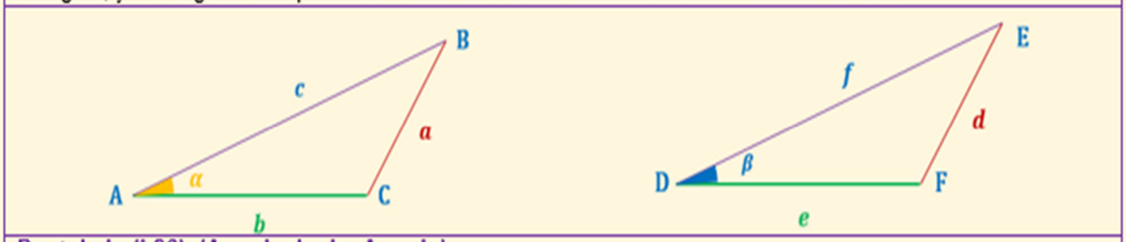
En la congruencia habrá 6 pares de elementos (3 pares de lados y 3 pares de ángulos). Los triángulos serán congruentes cuando tengan 3 de dichos elementos iguales.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA.

Postulados de congruencia

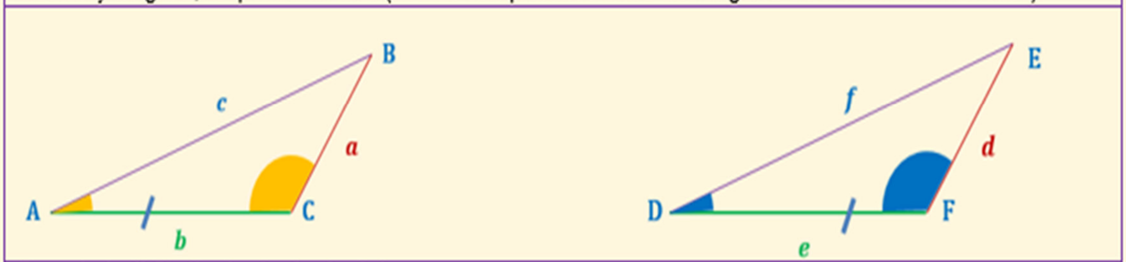
Postulado (I-4) (Lado, Angulo, Lado)

Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo, y los ángulos comprendidos entre esos lados tienen también la misma medida.



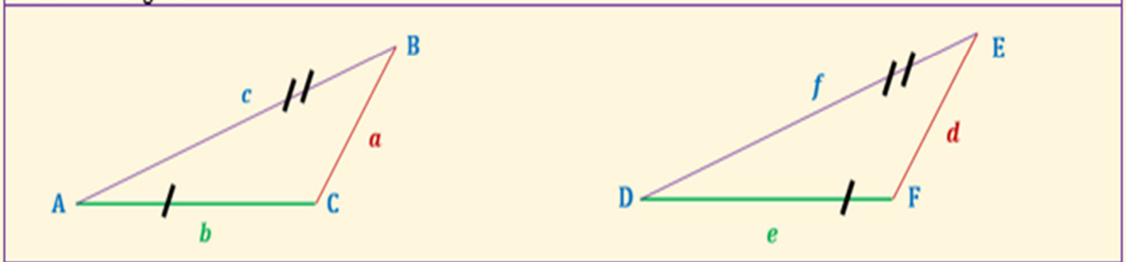
Postulado (I-26) (Angulo, Lado, Angulo)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente. (El lado comprendido entre dos ángulos es el lado común a ellos).



Postulado (I-8) (Lado, Lado, Lado)

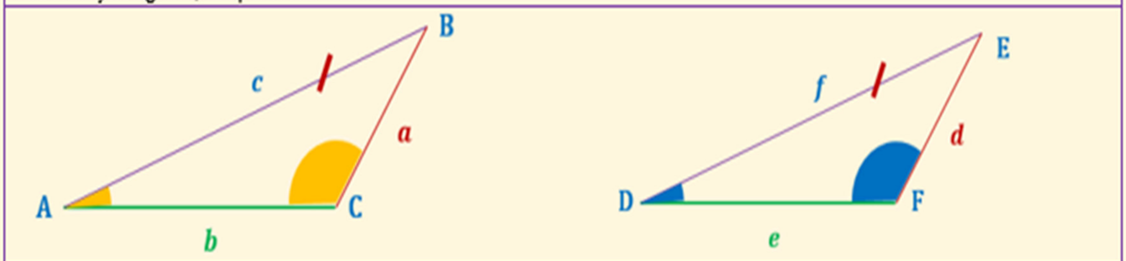
Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes del otro triángulo.



Teoremas de congruencia

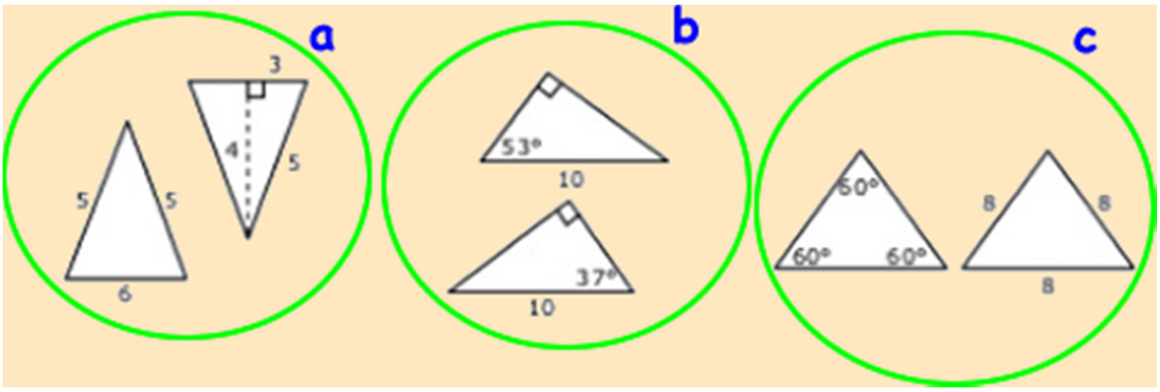
Teorema AAL (Angulo, Angulo, Lado)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y un lado, no comprendido entre los ángulos, tienen la misma medida y longitud, respectivamente.



Ejercicio 15

De los triángulos de la figura siguiente podemos decir que:



	a) La pareja de triángulos del grupo "a" son los únicos congruentes del dibujo.
	b) Solo son congruentes los triángulos del grupo a y b.
	c) Todos los triángulos son congruentes.

4.3.3) TEOREMAS SOBRE LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

TEOREMA DE THALES

En el libro VI de los elementos Euclídes se recoge la aplicación geométrica de la *Teoría General de la Proporción* de Eudoxo, de la que se derivará importantísimos resultados como:

El ***Teorema de la bisectriz*** (VI.2), el ***Teorema de Thales*** (VI.2), los **criterios de semejanza de triángulos** (VI.4, VI.5, VI.6) y el ***Teorema del cateto y de la altura*** (VI.8).

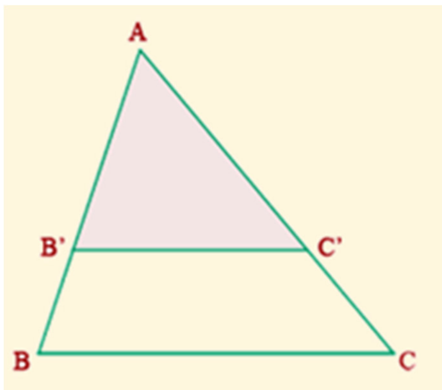
Los resultados que presentamos en esta parte son conocidos como Teorema de Thales.

Existen dos teoremas relacionados con la geometría clásica *que reciben el nombre de teorema de Thales, ambos atribuidos al matemático griego* Thales de Mileto *en el siglo VI a. C.*

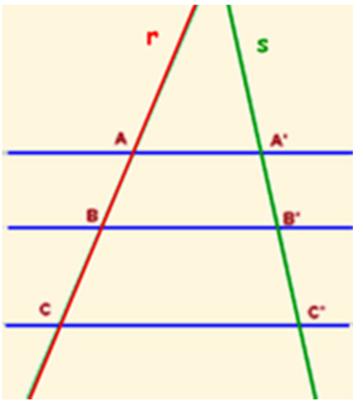
a) Primer Teorema de Thales

Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triángulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC**.

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$



b) <u>Segundo Teorema de Thales</u>



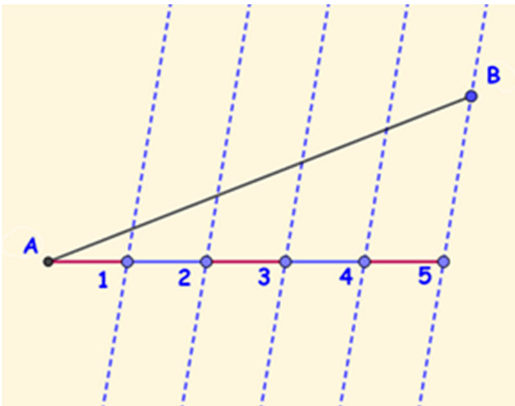
Dadas dos rectas concurrentes (que se cortan en un punto) cualesquiera de un plano, si dichas rectas son cortadas por dos o más rectas paralelas entre sí, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Se verifican las siguientes proporciones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

- **Aplicaciones del teorema de Thales**

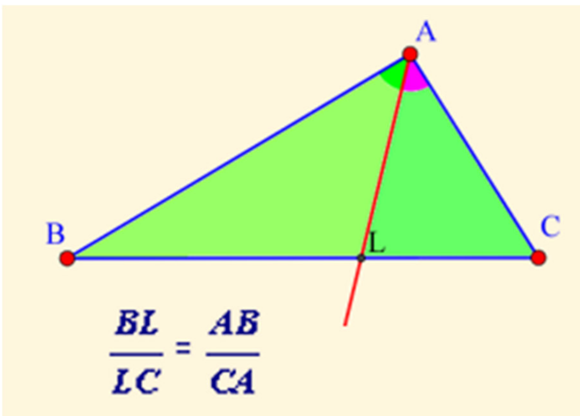
El teorema de Thales se puede utilizar para dividir un segmento en varias partes iguales.



Supongamos que deseamos dividir el segmento AB en cinco partes iguales. Trazamos una recta auxiliar concurrente con A o B y sobre ella llevamos cinco segmentos igules de cualquier dimensión.

Si unimos la última de las divisiones con el extremo libre, en este caso B y posteriormente llevamos paralelas a dicha recta por cada una de las divisiones realizadas sobre la recta auxilia, las intersecciones de dicha rectas con el segmento AB, nos dividirán este en las partes deseadas.

<u>TEOREMA DE LA BISECTRIZ.</u>



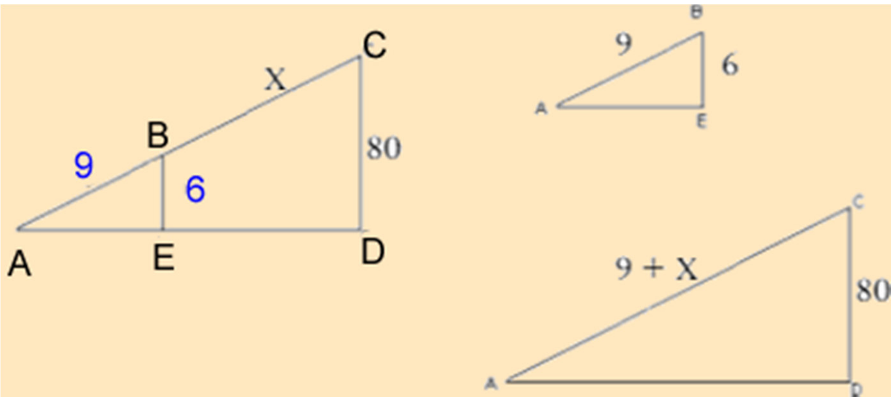
El teorema de la bisectriz del ángulo aparece como Proposición 3 del Libro VI en los Elementos de Euclides.

En todo triangulo la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

Demostración:

Ejercicio 16

Conociendo la información aportada en la figura, determina la longitud del segmento BC.



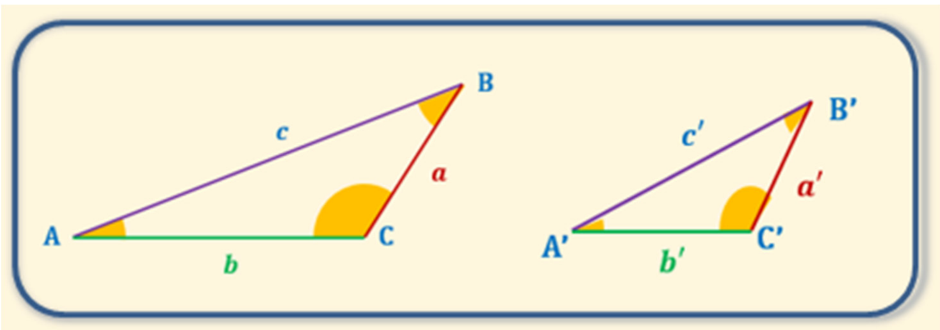
4.3.4) SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Todos los criterios de semejanza de triángulos se encuentran en el libro VI de los elementos de Euclides. Provienen de la aplicación geométrica de la *Teoría General de la Proporción* de Eudoxo a la fundamentación del concepto de semejanza, noción que por su carácter intuitivo se aplicaba instintivamente desde hacía centurias.

Decimos que dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma **forma** pero distinto **tamaños.**

Por ejemplo, dos mapas con distintas escalas son semejantes, pues la forma del contenido no cambia, pero sí el tamaño.

En la semejanza se puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no se altera su forma.



Forma: en el caso del triángulo, la forma sólo depende de sus ángulos. Por tanto para que dos triángulos (origen, imagen) sean semejantes sus ángulos deben de ser iguales uno a uno.

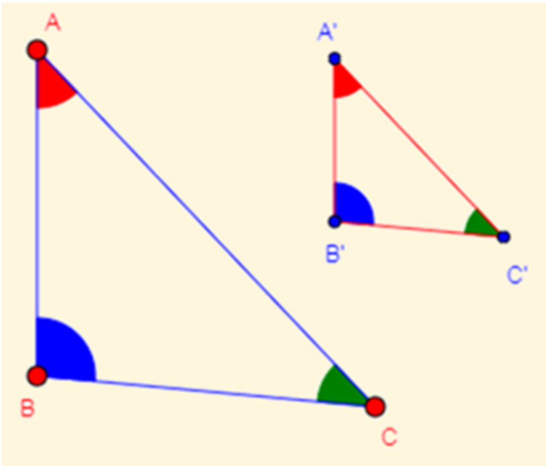
En la figura, los ángulos correspondientes son A = A', B = B' y C = C'. Para denotar que dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes se escribe ABC ~ A'B'C', donde el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con A', B' y C', respectivamente.

Tamaño: ocurrirá que aunque los lados de la figura imagen sean de distinto tamaño que los de la figura origen, sin embargo las razones longitud imagen / longitud origen de los lados homólogos son todas iguales, lo que da una segunda caracterización de los triángulos semejantes. **Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son congruentes.**

Teorema de semejanza. Ángulos iguales. AAA.

Diremos que dos triángulos ABC y A'B'C' son **semejantes**, si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \quad y \quad \hat{A} = \widehat{A'}$$



Por lo tanto, dos condiciones son importantes para la semejanza de triángulos:

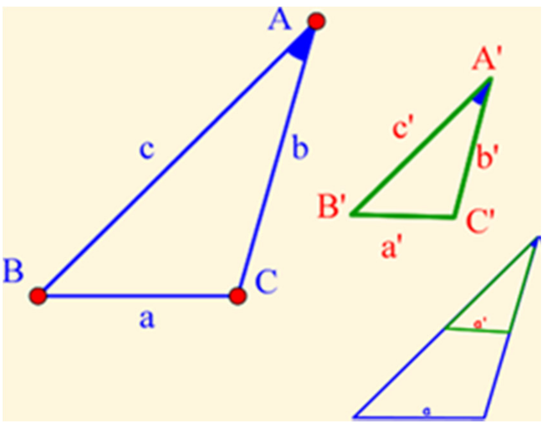
- que los ángulos correspondientes sean iguales.
- y que los lados correspondientes sean proporcionales.

Se demuestra que si se cumple una de las condiciones también se cumple la otra.

Teorema de semejanza. Lado, ángulo, lado. (LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, entonces los triángulos son semejantes.

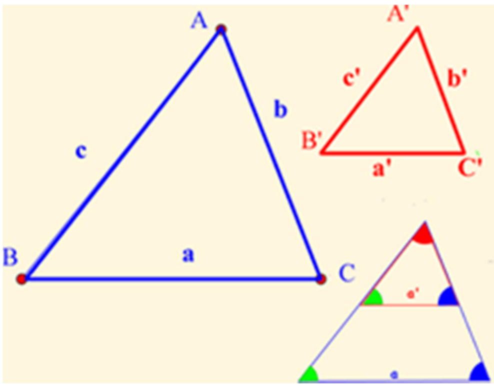
$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \quad y \quad \hat{A} = \widehat{A'}$$



Teorema de semejanza LLL.

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

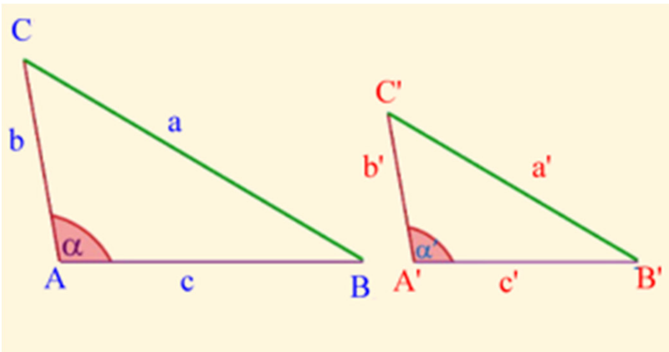
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



Teorema de semejanza. ALL.

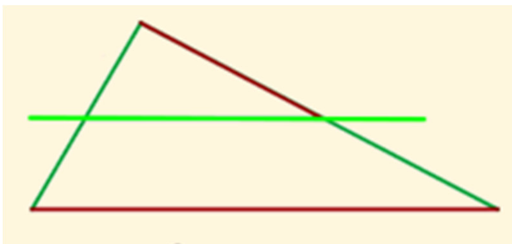
Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados de los otros ángulos son proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

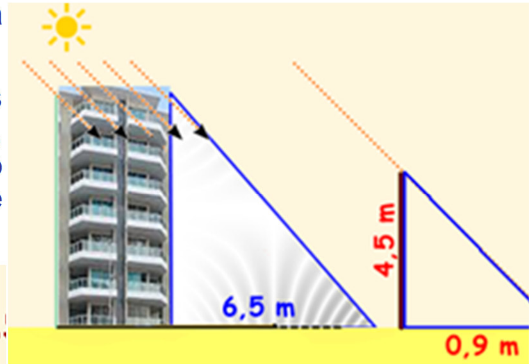


Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Todas las paralelas a un lado de un triángulo que no pase por el vértice opuesto, determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados, un triángulo semejante al dado.



Vamos a calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6.5 m a la misma hora que un poste de 4.5 m de altura de una sombra de 0.90 m.

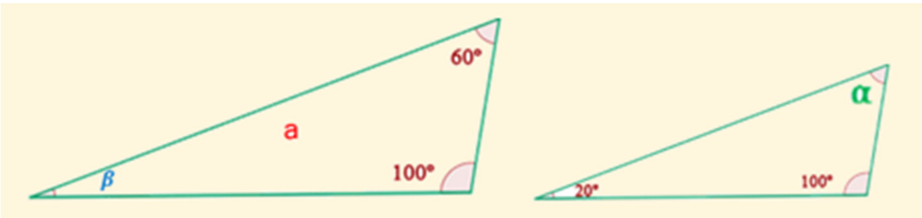


Como los dos triángulos tienen los tres ángulos iguales, al no ser iguales sus lados, tendrán que ser proporcionales, luego podemos establecer la siguiente proporcionalidad de sus los lados como:

$$\frac{0.9}{6.5}=\frac{4.5}{x} \qquad x=\frac{6.5\cdot 4.5}{0.9}=32.$$

Luego el edificio tendrá una altura de 32,5 m

¿Son semejantes estos triángulos?



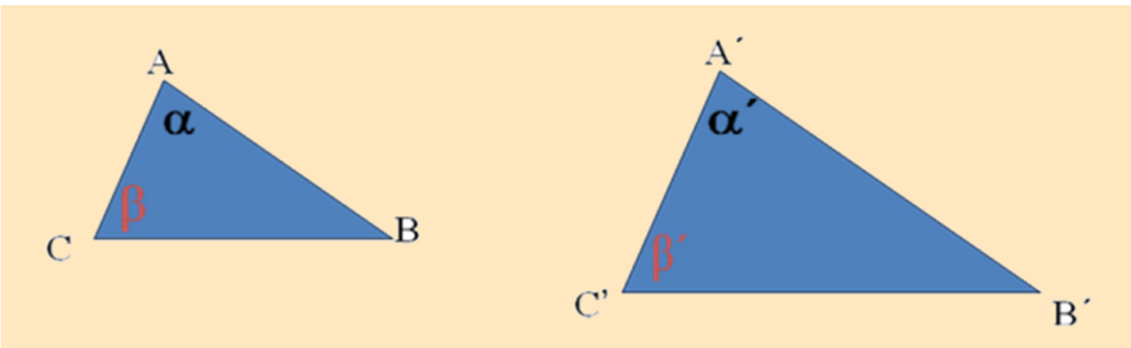
Calculemos los ángulos que nos faltan por conocer.

β=180°-160°=20°. Por otra parte α=180°-120°=60°

Luego los triángulos son semejantes por tener los tres ángulos iguales.

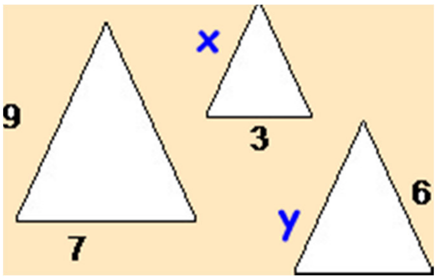
Ejercicio 17

¿Por qué son semejantes estos triángulos?



Ejercicio 18

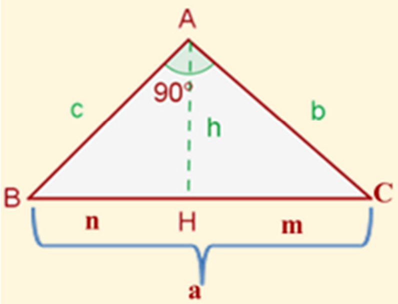
Calcula el valor de los lados de estos triángulos isósceles.



4.3.5) TEOREMAS FUNDAMENTALES QUE RELACIONAN LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Teorema del cateto

En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.



$b^2 = a.m$ Como $c^2 = a.n$

$a \Rightarrow$ hipotenusa

b y $c \Rightarrow$ catetos

$m \Rightarrow$ Proyección del cateto ***b*** sobre la hipotenusa

$n \Rightarrow$ Proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa

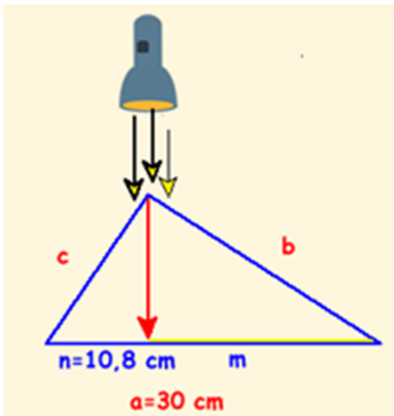
Veamos un ejemplo:

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10.8 cm.

Hallar el otro cateto.

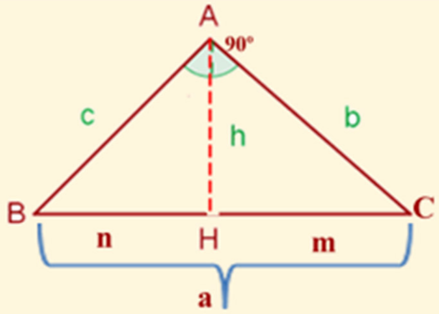
$$\frac{c}{30} = \frac{10.8}{c} \qquad c^2 = 30 \cdot 10.8$$

$$c = \sqrt{30 \cdot 10.8} \qquad c = 18\ cm$$



Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que dividen a ésta.

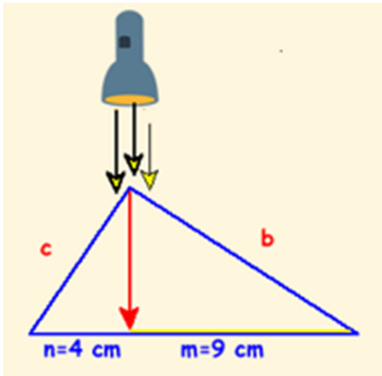


$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$ Por tanto: $HA^2 = HB.HC$ o lo que es lo mismo $h^2 = m.n$

En el ejemplo siguiente, en un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 metros. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.

$h^2 = m.n = 4.9 = 36$ Luego:

$h = \sqrt{36} = 6\ cm$



Teorema de Pitágoras.

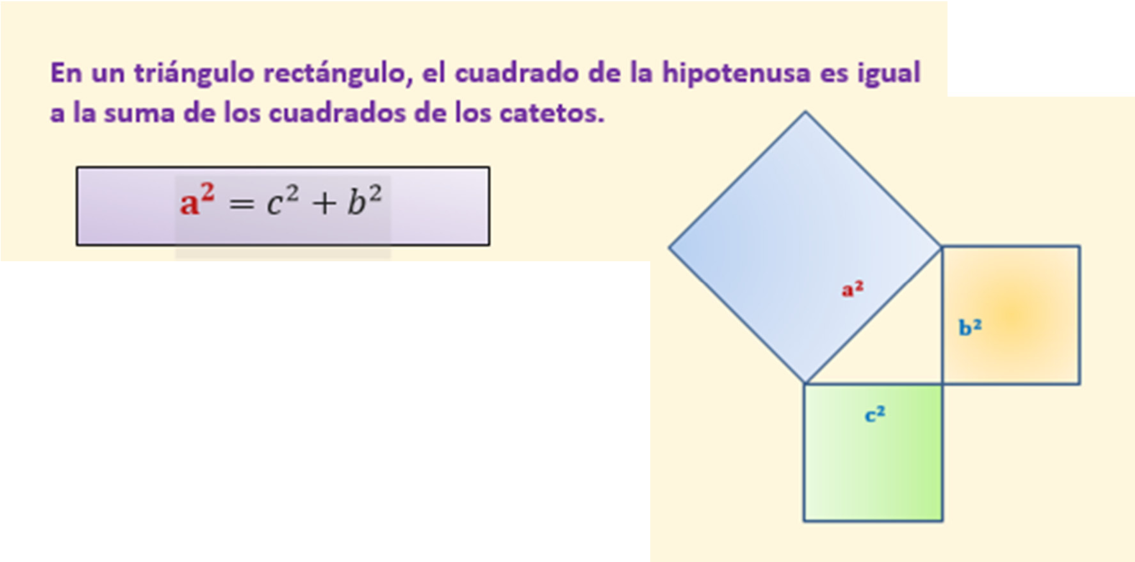
Una tradición muy persistente, atribuye el Teorema de Pitágoras al propio Pitágoras. Pero el examen arqueológico de tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, pertenecientes a las civilizaciones que se desarrollaron entre los ríos Tigris y Éufrates en el segundo milenio antes de J.C., ha revelado que los antiguos babilonios conocían aspectos del Teorema, más de mil años antes que el propio Pitágoras. Algo similar se puede afirmar respecto de las culturas que aparecieron a lo largo del río Nilo, así como de la antigua civilización hindú y de las antiguas culturas chinas que surgieron en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo.

Las referencias prehelénicas al Teorema no contienen demostración del mismo, atribuyendo a Pitágoras el primero en proporcionarnos una demostración lógica del Teorema, de aquí que éste haya pasado a la historia con su nombre.

El teorema de Pitágoras pudo ser la primera demostración matemática de la historia, lo que es una evidencia que dicho teorema se encuentra por doquier en la Matemática. Es la base de multitud de teoremas geométricos, de los estudios sobre polígonos y poliedros, de la Geometría Analítica y de la Trigonometría. Por todo ello necesitamos conocerlo y utilizarlo con precisión.

Se documenta la existencia de más de 370 demostraciones relativas al teorema de Pitágoras.

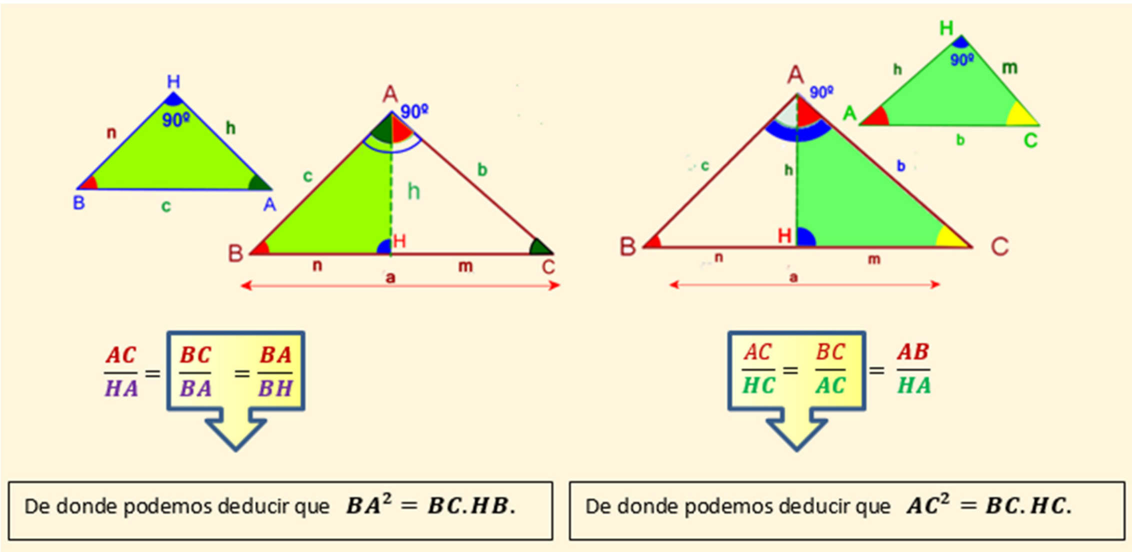
Podríamos enunciar el teorema de Pitágoras como:



Por su sencillez vamos a realizar la demostración que se le supone a Pitágoras, la cual se basada en su propia Teoría de las Proporciones.

Si recordamos la demostramos del teorema del Cateto, habíamos llegado a establecer las siguientes proporciones entre los tres triángulos semejantes de la figura.

Las proporciones establecidas fueron (*fijarse en los lados opuestos a los ángulos*):



Si sumamos las dos relaciones anteriores tendremos:

$$BA^2 + AC^2 = BC.HB + BC.HC = BC.(HB+HC) = BC.BC = BC^2$$

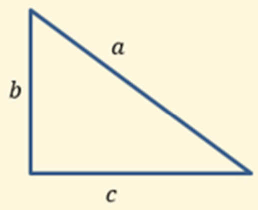
Como a=BC, b=AC y c= AB. Tendremos que: $a^2 = b^2 + c^2$ **(c.q.d)**

- **Ternas Pitagóricas**

En la búsqueda de ternas de números **a, b, c**, que cumplan la relación $a^2 = b^2 + c^2$, nos encontramos con diferentes reglas, algunas de las cuales son:

- Ternas de Pitágoras. Siendo **m** un número impar mayor que uno, entonces:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}.(m^2+1) \\ b = \frac{1}{2}.(m^2-1) \\ c = m \end{cases}$$

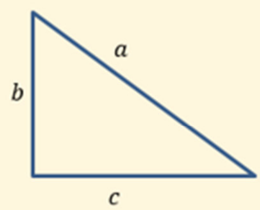


m	c	b	a
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41
11	11	60	61
13	13	84	85
15	15	112	113

En las ternas de Pitágoras, la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en una unidad.

- Ternas de Platón. Siendo **m** un número mayor que uno:

$$\begin{cases} a = (m^2+1) \\ b = (m^2-1) \\ c = 2m \end{cases}$$



m	c	b	a
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37
7	14	48	50
8	16	63	65

En las ternas de Platón, la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian dos unidades.

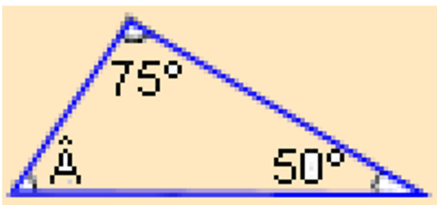
Ejercicio 19

La siguiente terna de números (20,101,99), ¿es una terna pitagórica?

	a) Si por que el área del cuadrado de lado 20 sumada al área del cuadrado de lado 99, es igual al área del cuadrado de lado 101
	b) No es una terna pitagórica, porque no cumple el teorema de Pitágoras
	c) No porque no se verifica la desigualdad triangular

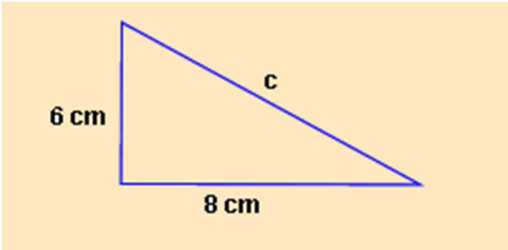
Ejercicio 20

En el triángulo de la figura, calcula cuánto mide el ángulo A.

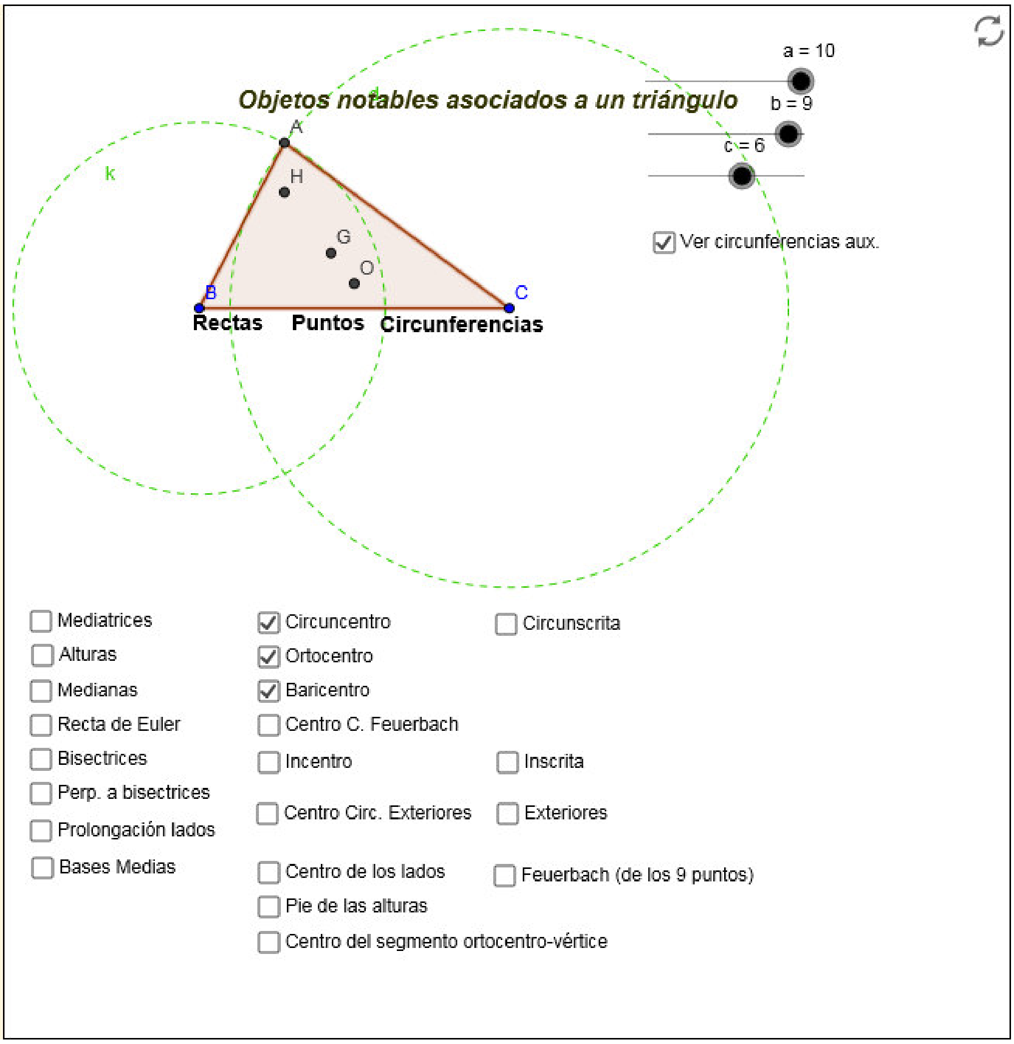


Ejercicio 21

En un triángulo rectángulo, los dos catetos miden 8 y 6 cm, respectivamente. Dibuja el triángulo y calcula el valor de la hipotenusa.



Puedes conocer más sobre los triángulos.



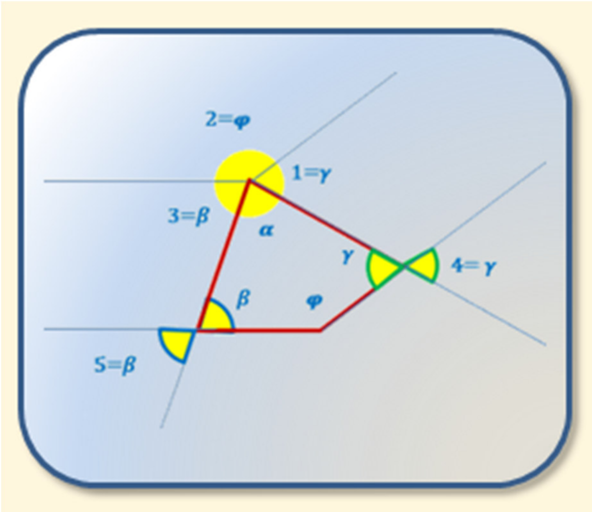
4.4) CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son polígonos cerrados de cuatro lados.

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

Si observamos la figura entendemos que ángulo 1 es igual al ángulo 4 por tener los lados paralelos a este, y el ángulo 4 es igual al ángulo γ por ser su opuesto por el vértice. Lo mismo podríamos decir de los ángulos marcados como 3 y 5. De la misma forma, por paralelismo de lados el ángulo 2 es igual al ángulo $\boldsymbol{\varphi}$.

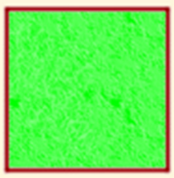
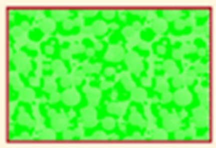
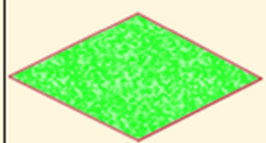
Por tanto demostramos que la suma de los ángulos internos $\boldsymbol{\gamma + \varphi + \beta + \alpha = 360º}$



Atendiendo a los lados los cuadriláteros se denominan:

- ***Paralelogramos:***

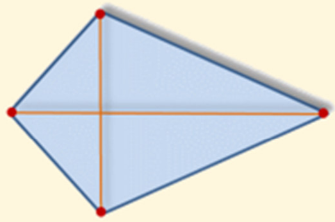
Cuadriláteros que tienen los lados paralelos dos a dos. Diferenciándose entre:

Cuadrado • Los 4 lados son iguales y paralelos dos a dos. • Los 4 ángulos son iguales y rectos. • Sus diagonales son iguales, perpendiculares (forman un ángulo de 90º) y se cortan en su punto medio.		***Rectángulo*** • Los lados iguales dos a dos • Los 4 ángulos rectos. • Sus diagonales son iguales, se cortan en su punto medio pero sin formar ángulo recto.	
Rombo • Tiene los cuatro lados iguales, paralelos dos a dos. • Los ángulos iguales dos a dos. • Sus diagonales desiguales se contar formando 90º.		***Romboide*** • Tiene los cuatro lados iguales, paralelos dos a dos. • Los ángulos iguales dos a dos. • Sus diagonales iguales no se cortan perpendicualarmente.	

➢ *Trapecios.*

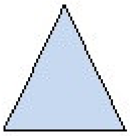
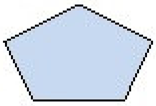
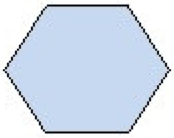
Trapecios. **Cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, llamados base mayor y base menor. Se clasifican en:** 	**Trapecio Rectángulo** • Tiene un ángulo recto.	
	Trapecio Isósceles • Sus lados no paralelos son iguales. Los ángulos internos son iguales dos a dos	
	Trapecio Escaleno • No tiene ningún lado igual ni ángulo recto..	

➢ *Trapezoides*

Trapezoides **• Cuadriláteros que no tiene ningún lado igual ni paralelo.**		
	Deltoide o cometa. • Es un cuadrilátero cuyos lados contiguos son iguales dos a dos. Es un trapezoide con dos pares de lados consecutivos iguales, siendo el primer par de lados diferente al segundo par de lados, también conocido como trapezoide simétrico. • Las diagonales de un deltoide se cortan formando un ángulo recto.	

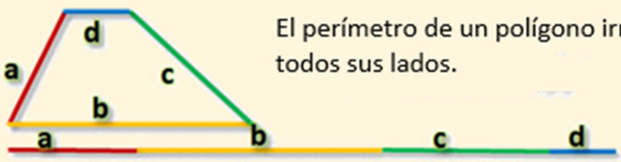
Ejercicio 22

Completa la siguiente tabla:

Figuras	Lados	Vértices	Ángulos	Diagonales
				
				
				
				

4.4.1) PERÍMETROS Y ÁREAS DE LOS POLÍGONOS

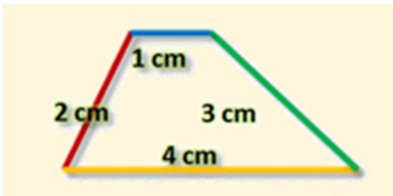
Perímetro de un Polígono.



El perímetro de un polígono irregular se calcula sumando las medidas de todos sus lados.

Ejercicio- Supongamos que las medidas de los lados de este polígono son a = 2 cm, b = 4 cm, c = 3 cm y d = 1 cm; entonces, su perímetro será:

P = 2 cm + 4 cm + 3 cm + 1 cm = 10 cm



Si el polígono es regular como tiene todos sus lados iguales, su perímetro será tantas veces la medida de uno de sus lados.

En este hexágono de la figura de lado 4 cm, su perímetro será 6 veces el lado, es decir 6 x 4 = 24 cm.

Así:

- El perímetro de un triángulo equilátero es tres veces la longitud de su lado: P=l+l+l=3l
- El perímetro de un cuadrado es cuatro veces la longitud de su lado: P=l+l+l+l=4l
- El del pentágono regular es P = 5l... y así sucesivamente.

Área de un Polígono.

El área de un polígono es la medida del plano, (superficie), encerrado en su interior.

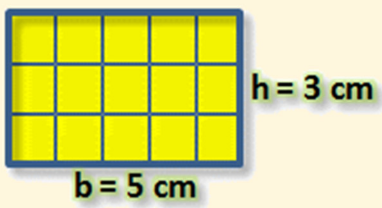
Para medir el área utilizamos unidades cuadradas (como el m^2, cm^2, km^2...)

Veamos el área de los polígonos más básicos:

- **Área del rectángulo:**

El área del rectángulo es el producto de la medida de su base por su altura.

Área rectángulo = $b.h$

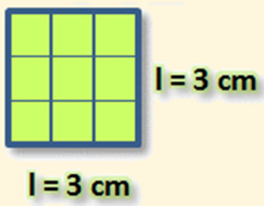


Área rectángulo = 5 x 3 = 15 cm^2

- **Área del cuadrado:**

El cuadrado, al ser iguales la base y la altura, tiene por área su lado al cuadrado (lado por lado).

Área cuadrado = $L.L = L^2$

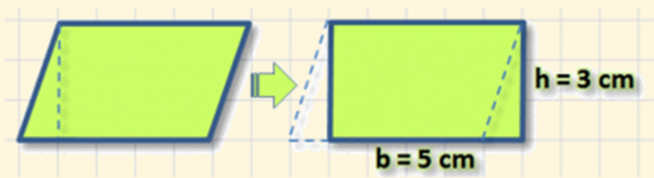


Área cuadrado = 3^2 = 9 cm^2

- **Área del romboide:**

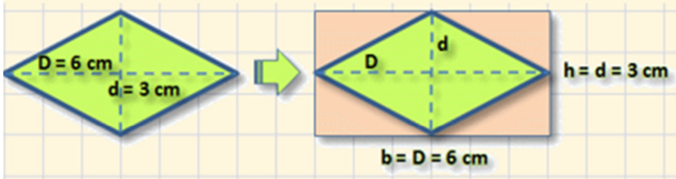
El romboide se puede transformar en un rectángulo, por lo cual su área también es el producto de su base por su altura.

Área romboide = b.h



Área romboide = 5 x 3 = 15 cm2

- **Área del rombo:**

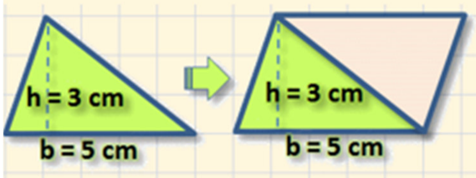


Si insertamos el rombo en un rectángulo su base es igual a la diagonal mayor del rombo, **D**, y su altura es igual a la diagonal menor, **d**, observaremos que el área del rombo es la mitad del área de ese rectángulo.

Área del rombo $=\frac{D.d}{2}=\frac{6.3}{2}=\frac{18}{2}=9\ cm^2$

Área del rombo $=\frac{b.h}{2}=\frac{D.d}{2}$

- **Área del triángulo:**



Si trazamos paralelas a los catetos del triángulo obtenemos un romboide del cual el triángulo es la mitad.

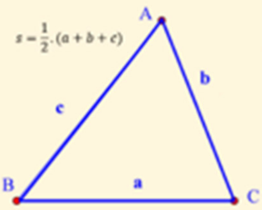
Si el área del romboide es b . h, entonces el área del triángulo, que es la mitad, también será la mitad.

Área del triángulo $=\frac{b.h}{2}=\frac{5.3}{2}=\frac{15}{2}=7,5\,9\ cm^2$

Área del Triángulo $=\frac{b.h}{2}$

Mediante la fórmula de Herón, conociendo la longitud de los lados de un triángulo a, b y c, se puede calcular el área sin conocer la altura del mismo.

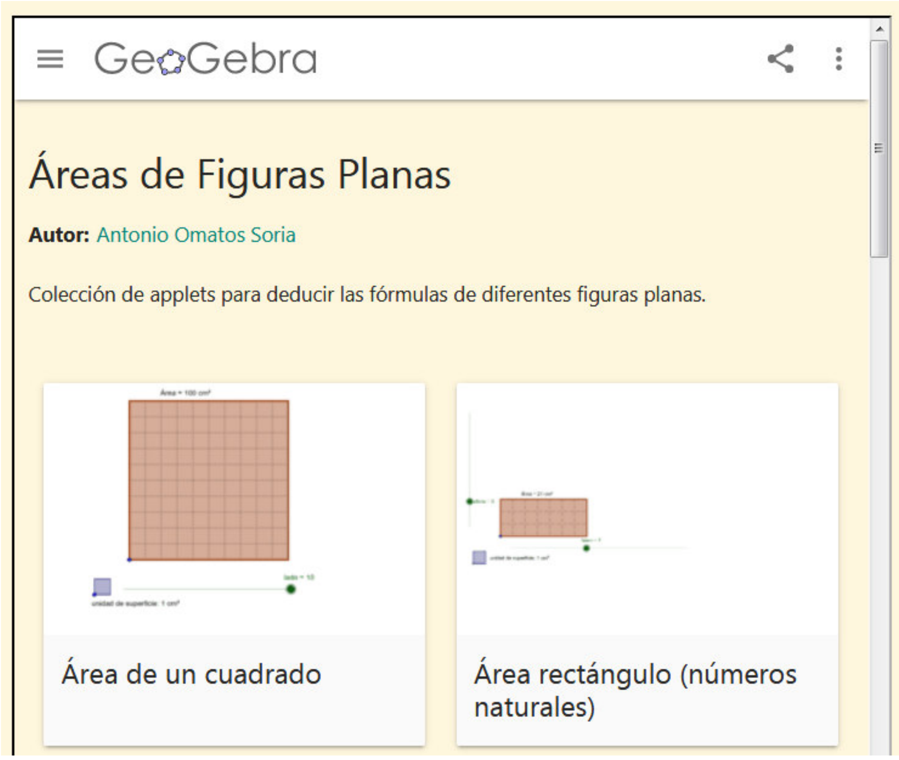
Para aplicar la fórmula, primero se calcula el semiperímetro S=P/2 y luego se sustituye en la igualdad.



$$s=\frac{1}{2}.(a+b+c)$$

$$Área=\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Ejercicio 23 (interactivo)

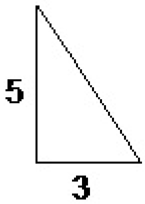


https://www.geogebra.org/m/114518

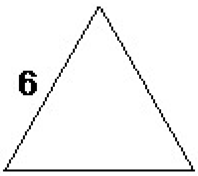
Ejercicio 24

Calcula la superficie y el perímetro de los siguientes triángulos, utilizando, si es preciso, el teorema de Pitágoras.

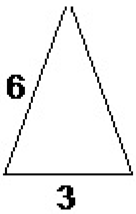
a)



b)

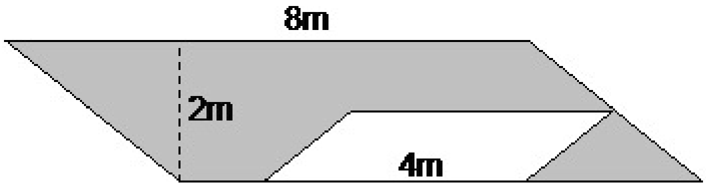


c)



Ejercicio 25

Determina el área de la zona sombreada:



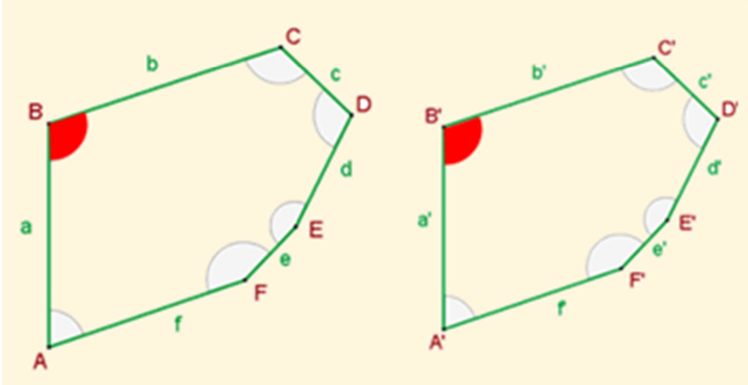
4.4.2) SEMEJANZA DE POLÍGONOS. APLICACIONES

Dos polígonos son semejantes cuando tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.

Igualdad de ángulos:

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}', \ \hat{D} = \hat{D}', \ \hat{E} = \hat{E}', \hat{F} = \hat{F}'$$

Proporcionalidad de lados: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'}$



- La razón de la proporción entre los lados de los polígonos se llama **razón de semejanza.**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

- **La razón de los perímetros** de los polígonos semejantes es igual a su razón de semejanza.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{p}{p'} = r$$

- **La razón de las áreas** de los polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r \qquad \frac{S}{S'} = r^2$$

Construcción de figuras semejantes. Método de la proyección.

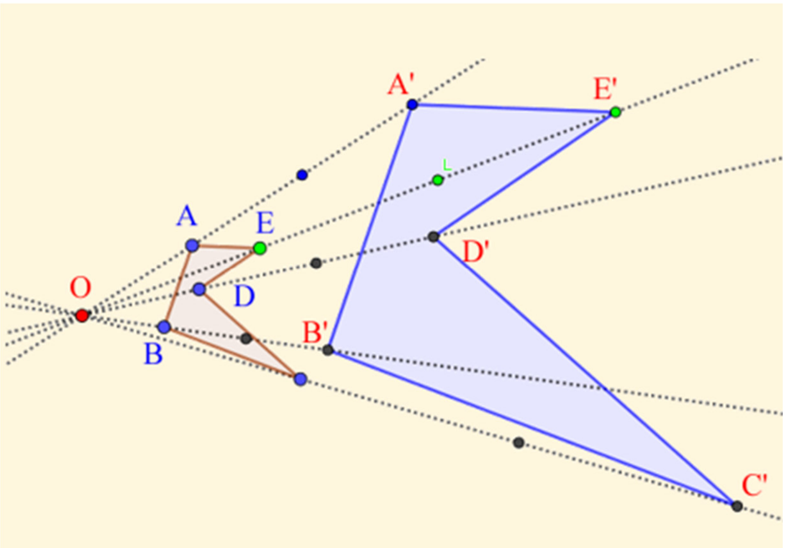
Si queremos dibujar una figura semejante a otra con razón de semejanza **K**, tomaremos un punto cualquiera de referencia “**0**”, uniremos prolongando cada vértice de la figura con el punto de referencia.

Posteriormente determinaremos el punto homólogo de cada uno de los vértices, llevando sobre cada rayo de proyección **K** veces la distancia a la que se encuentra dicho vértice del punto de referencia.

A esta razón de semejanza se le denomina **escala.**

En este ejemplo la razón de semejanza es k=3 pues el punto A’ dista del punto O tres veces más de lo que dista el punto A.

$$\frac{A'E'}{AE} = \frac{OE'}{OE} = \frac{OA'}{OA} = 3$$

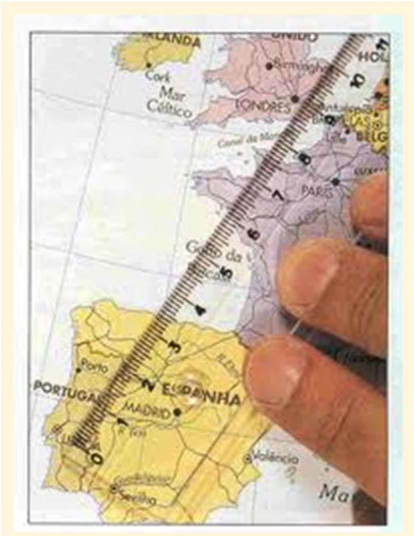


Si se observa la figura, como el triángulo OAE, es semejante al triángulo OA’E’ por el primer teorema de Thales:

$$\frac{A'E'}{AE} = \frac{OE'}{OE} = \frac{OA'}{OA} = 3$$

Con lo cual habríamos generado una figura semejante a la inicial por tener los ángulos iguales y los lados proporcionales.

- **APLICACIÓN DE LA SEMEJANZA**



Gracias a la semejanza, manteniendo la forma, lo grande lo podemos representar pequeño y lo pequeño grande. Esa constante de proporcionalidad que nos aumenta o nos disminuye el tamaño del objeto inicial, le denominamos escala, una aplicación de todos conocida es la cartografía y su resultado los mapas, la representación reducida y simplificada de la superficie terrestre o de una parte de ésta.

Gracias a la semejanza la representación guarda las mismas proporciones que la superficie real y permita hacer cálculos y mediciones.

La constante de semejanza o Escala es la relación entre la medida lineal representada en el dibujo y la medida lineal del objeto real.

Esto es: $Escala = \dfrac{\textbf{dimensión dibujo}}{\textbf{dimensión real}}$ Si E es $\begin{cases} > \textbf{1 escala de aumento} \\ \textbf{1 decimos que la escala es natural} \\ < \textbf{1 escala de disminución} \end{cases}$

La escala puede venir expresada en forma de fracción expresión decimal o como porcentaje del aumento o disminución Así por ejemplo la escala E:=7:10, podemos expresarla como E=0,7 o como E=70% del natural.

Triángulo universal de escalas.

Con los conocimientos que ya tenemos podremos crear escalímetros, es decir, reglas graduadas a la escala que nos interese.

Veamos cómo podríamos fabricarnos fácilmente varías escalas de reducción.

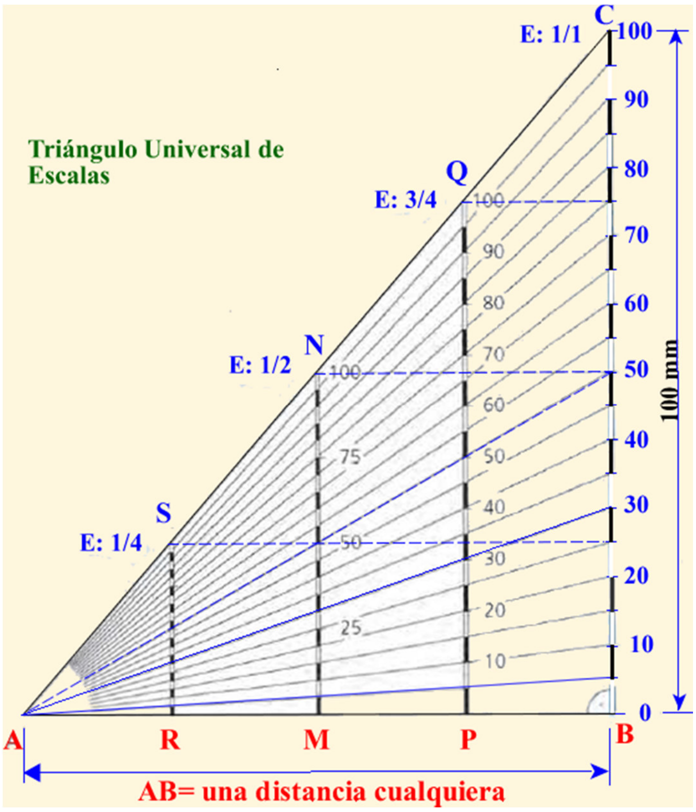
Proceso de construcción:

Se traza el triángulo rectángulo ABC, el cateto AB, lo tomamos de un valor cualquiera y el otro BC por ejemplo de 100 mm.

Sobre éste último realizamos divisiones de 5 mm, las cuales uniremos con el vértice **A** del triángulo al tiempo que las numeramos.

Si ahora calculamos el punto medio del segmento base **AB** y por el trazamos una perpendicular, el segmento **MN** que se define será proporcional al segmento BC, cuyas razones de semejanza K=E será de 1/2.

Las graduaciones sobre el segmento **MN**, nos permite leer o transportar a escala natural las figuras o dibujos que estén realizados a escala 1/2.



$$E = K = \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{2.AM} = \frac{1}{2}$$

Si la perpendicular la trazásemos por el punto P como el segmento AP será la ¾ partes de AB, obtendremos por dicha perpendicular la graduación de una escala de 3/4.

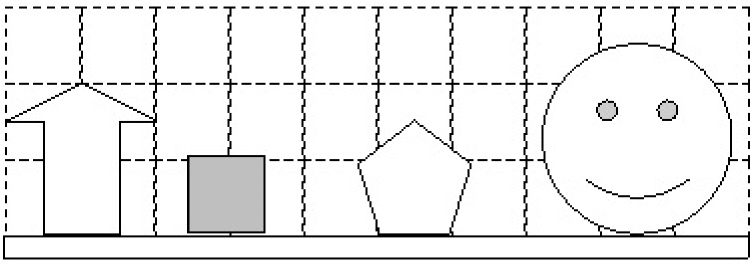
Por el mismo razonamiento si la perpendicular fuese trazada por **R** la escala seria de 1/4.

Para la construcción efe cualquier otra escala se procede de forma análoga.

Ejercicio 26

El dibujo siguiente está hecho a escala 1:10.000, y el lado de cada cuadrado de la retícula mide 1cm.

¿Cuál es la altura real, en metros, de los objetos representados en la figura?



Flecha ______ Cuadrado ______ Pentágono ______ Cara ______

Ejercicio 27

En un plano a escala 1:50.000, se desea saber que longitud tiene un tramo de camino que mide en el plano 60 cm.

Si hubiésemos consultado un plano que estuviese a escala 1:30.000. ¿Cuantos centímetros sobre dicho plano hubiésemos medido?

5) El círculo y la Circunferencia

5.1) La Circunferencia

Una circunferencia es una línea curva cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia de un punto interior llamado centro. Pertenece a la familia de las curvas cónicas.

Los elementos geométricos relacionados con la circunferencia son:

- **Centro** punto del interior de la circunferencia equidistante (a igual distancia) de cualquier punto de la circunferencia.
- **Radio** es el segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- **Diámetro** es el segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. El diámetro es el doble del radio. D = 2·R
- **Cuerda** es el segmento que une dos puntos cuales quiera de la circunferencia. La cuerda mayor de una circunferencia es el diámetro.
- **Arco** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia** es cada una de las partes en que un diámetro divide a una circunferencia, es decir, media circunferencia

Longitud de la circunferencia. El número π

Desde la antigüedad se conoce que desde un punto se puede trazar cualquier circunferencia de radio deseado.

Se conocía la ***proporcionalidad*** existente entre el diámetro y la longitud de su circunferencia, pero encontraron que dicha proporción no podía expresarse ni con un valor exacto ni con un número racional.

Será Arquímedes (siglo III a. de C.) quien demostrará que esas constantes eran la misma tanto para la circunferencia como para el círculo y aproximará su valor utilizando para ello el método de exhaución de Eudoxo, consistente en inscribir y circunscribir en una circunferencia polígonos, llegando hasta utilizar polígonos regulares de 96 lados, consiguiendo una magnífica aproximación (si tenemos en cuenta los medios con los que contaba), **$3+10/71 < \pi < 3+1/7$**; es decir, el número buscado está entre 3'1407 y 3'1428.

Al número irracional (*inconmesurable*) que representa dicha proporción se le denomina $\boldsymbol{\pi}$**.** (primera letra de la palabra circunferencia en griego).

Como $\boldsymbol{\pi}$ es un número que contiene infinitas cifras decimales no periódicas, solemos aproximarlo al valor 3,14 pero podríamos tomar indefinidos valores decimales 3,14159265358979323846…

Este gif nos explica de una manera sencilla qué es Pi:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pi-unrolled-720.gif

Por tanto podemos decir que: $\frac{L}{d} = \pi \Rightarrow \mathbf{L = \boldsymbol{\pi}.d}$

La longitud de una circunferencia es pi ($\boldsymbol{\pi}$) veces su diámetro.

Al ser el diámetro el doble que el radio también podemos decir que la longitud de una circunferencia es igual al doble de pi ($\boldsymbol{\pi}$) por el radio. **L = 2.$\boldsymbol{\pi}$.r**

Arco de circunferencia

Para calcular la longitud de una parte de la circunferencia, longitud que se denomina arco de circunferencia ($\boldsymbol{\varphi}$), debemos conocer el ángulo central (β) cuyos lados delimitan los extremos del arco. Además debemos conocer el radio de la circunferencia que lo sustenta.

$$\frac{L}{360^\circ} = \frac{\varphi}{\beta}$$

O bien si medimos en radianes

$$\frac{L}{2.\pi} = \frac{\varphi}{\beta}$$

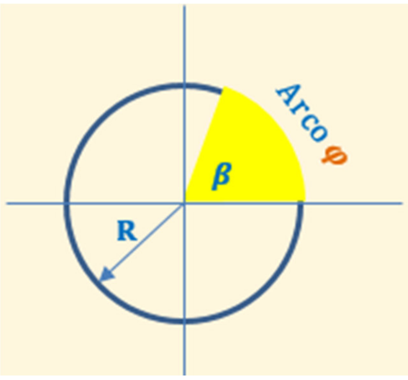
Por tanto la longitud del arco será:

$$\frac{2.\pi.r}{360^\circ} = \frac{\varphi}{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \beta.\frac{2.\pi.r}{360^\circ}}$$

O si el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ viene expresaso en radianes el arco valdría:

$$\frac{L}{2.\pi} = \frac{2.\pi.r}{2.\pi} = \frac{\varphi}{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \beta.r}$$

Lo que significa que el arco tiene $\boldsymbol{\beta}$ veces el radio, es decir, una longitud de $\boldsymbol{\beta}$ radianes.



De aquí la gran ventaja de trabajar con radianes, pues ángulo y arco abarcado podremos expresarlo con el mismo valor.

Ejercicio 28

El carro de un señor que se llamaba Manolo Escobar tiene unas ruedas cuyo diámetro mide 2 metros.

¿Cuánta distancia habría recorrido Manolo antes de que le robaran el carro si cada rueda ha dado 130 vueltas?

Ejercicio 29

$si\ \pi = \frac{L}{d}$ **y decimos que pi es un número irracional entonces ¿cómo podemos expresarlo como cociente de dos números? ¿Son enteros dichos números?**

5.1.1) POSICIONES RELATIVAS

Posición de una recta con respecto a una circunferencia.

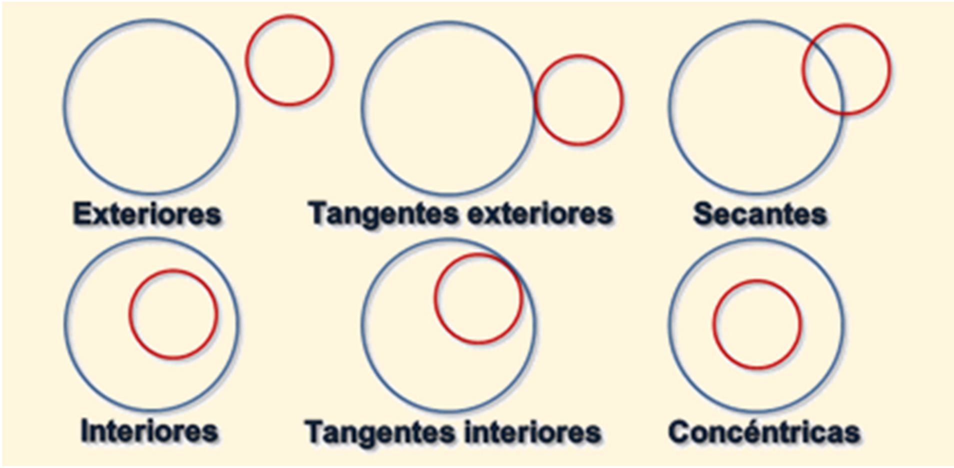
Decimos que una recta puede situarse respecto a una circunferencia como:

- **Recta exterior**: es aquella que no toca en ningún punto a la circunferencia.
- **Recta tangente:** es aquella que toca en un solo punto a la circunferencia.
- **Recta secante:** es aquella que toca en dos puntos a la circunferencia.

Posiciones relativas de dos circunferencias.

Según los puntos que comparten diferenciamos:

- **Exteriores:** no comparten ningún punto en común.
- **Interiores**: no comparten ningún punto en común pero una está dentro de la otra.
- **Tangentes exteriores**: comparten un punto en común pero ninguna está incluida en la otra.
- **Tangentes interiores:** comparten un punto en común y una está dentro de la otra.
- **Secantes**: cuando comparten dos puntos en común (se cortan en dos puntos).
- **Concéntricas:** es un caso especial de circunferencias interiores que tienen el mismo centro.



Posición de un ángulo respecto a una circunferencia

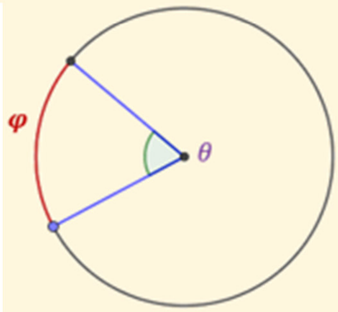
Podemos definir los siguientes tipos de ángulos en relación con una circunferencia:

➢ *Ángulo central*

El **ángulo central** es el que tiene el vértice en el centro de la circunferencia siendo sus lados dos radios de la misma.

Los puntos donde dichos radios cortan a la circunferencia definen sobre ella una porción de longitud que denominamos arco.

En la figura vemos que el ángulo central $\boldsymbol{\theta}$ abarca o subtiende el **arco** $\boldsymbol{\varphi}$.

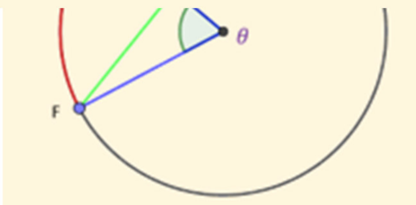


➢ *Ángulo inscrito en la circunferencia*

El ángulo inscrito en una circunferencia es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas de la misma (si las cuerdas se prolongan, diremos que son dos **rectas secantes**).

En la figura podemos observar que el ángulo inscrito **α** abarcan el **arco FG**.

Un **ángulo inscrito (α) vale la mitad del ángulo central (**$\boldsymbol{\theta}$**) que comparte el mismo arco** $\boldsymbol{\varphi}$**.**



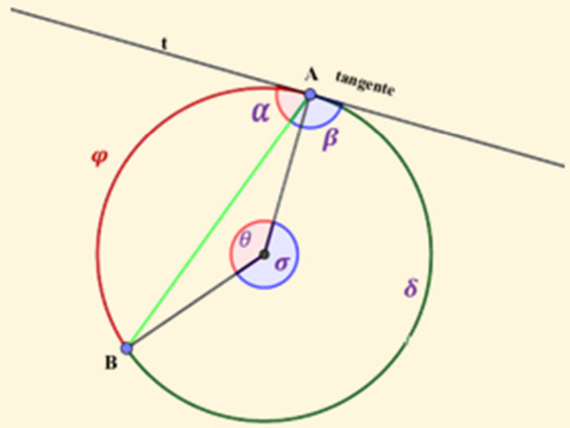
➢ *Ángulo semiinscrito en la circunferencia*

El ángulo **semiinscrito** es aquel que teniendo su vértice en la circunferencia (**A**), los lados que lo definen son una cuerda (**AB**) y la tangente a la circunferencia por el vértice (**t**).

La tangente, que es perpendicular al radio, es lado de dos ángulos semiinscritos **(α)** y **(*β*)** cada uno subtiende un arco diferente. El ángulo **α** abarca el arco ***φ***, mientras que el semiiscrito *β* abarca el arco ***δ***

El valor de un ángulo semiiscrito es igual a la mitad del ángulo central que comparte su mismo arco. Así:

$$\propto = \frac{\theta}{2} \text{ mientras que } \beta = \frac{\sigma}{2}$$

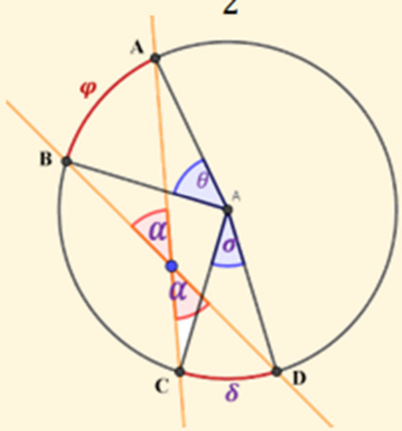


➢ *Ángulo interior en la circunferencia*

El ángulo **interior a una circunferencia (α)** tiene su vértice en un punto interior de esta. Los lados que lo definen son dos rectas secantes que intersectarán a la circunferencia formado dos arcos, ***φ*** y ***δ***.

Su valor es la semisuma de los ángulos centrales θ y σ que abarcan los arcos definidos por los lados del ángulo interno.

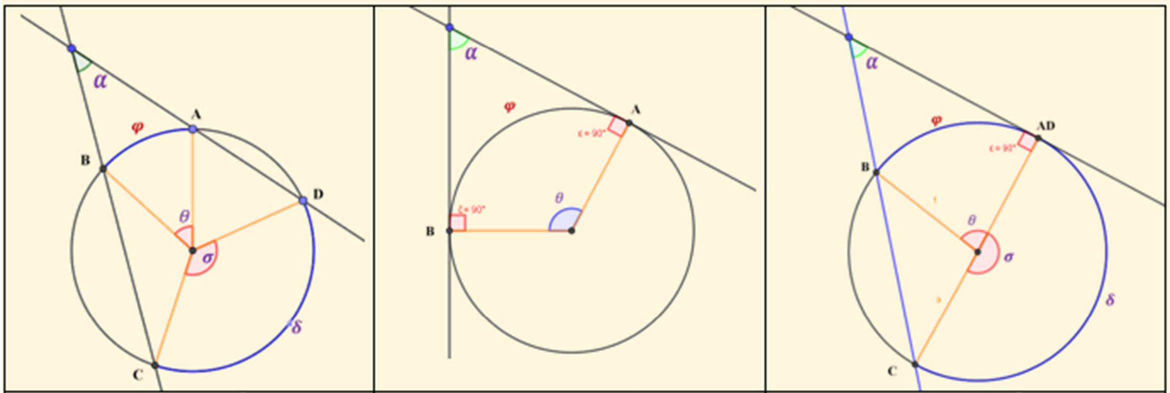
$$\propto = \frac{\theta + \sigma}{2}$$



- ***Ángulos exteriores a la circunferencia.***

El **ángulo exterior (α)** a una circunferencia, tiene su vértice **(A)** en un punto exterior a la circunferencia. Sus lados son dos **rectas** que pueden ser **tangentes o secantes** a la circunferencia.

El valor del ángulo exterior **(α)** será:

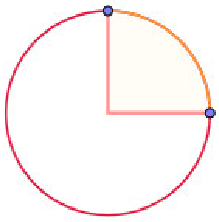


$\alpha = \dfrac{\sigma - \theta}{2}$	$\alpha = 180° - \theta$	$\alpha = \dfrac{\sigma - \theta}{2}$

θ y σ son ángulos centrales que comparten los arcos φ y δ definidos por los lados del ángulo externo.

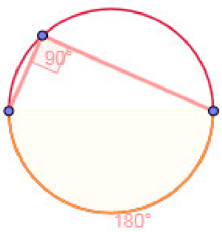
Vista Gráfica

Central



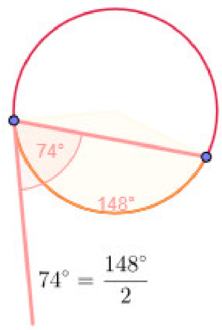
Ángulo : 90°

Inscrito



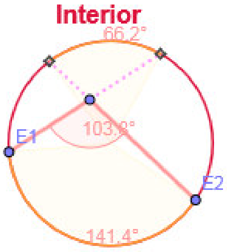
$$90° = \frac{180°}{2}$$

Semiinscrito



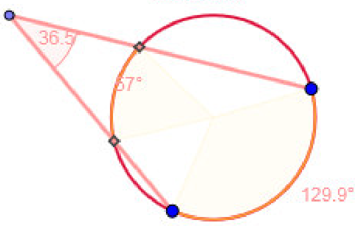
$$74° = \frac{148°}{2}$$

Interior



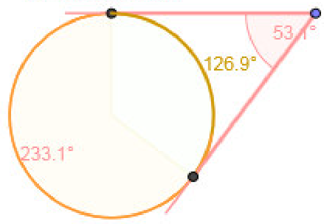
$$103.8° = \frac{141.4° + 66.2°}{2} = \frac{207.5°}{2}$$

Exterior



$$36.5° = \frac{129.9° - 57°}{2} = \frac{73°}{2}$$

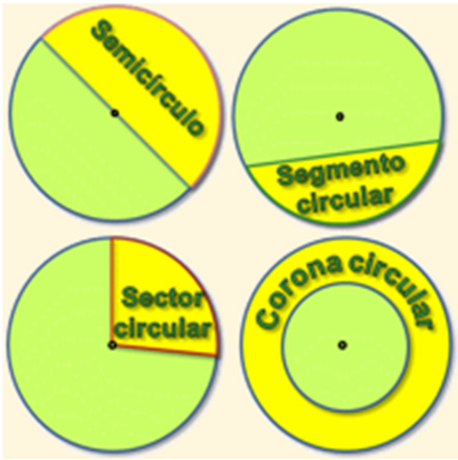
Circunscrito



$$53.1° = \frac{233.1° - 126.9°}{2} = \frac{106.3°}{2}$$

5.2) EL CÍRCULO

El círculo es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Por tanto está formado por todos los puntos de la circunferencia y todos los puntos del plano delimitados por ella.



Al hablar del círculo debemos distinguir entre:

- **Semicírculo:** una de las dos partes iguales que delimita un diámetro.
- **Sector circular:** es la parte del círculo comprendida entre dos radios y su arco.
- **Segmento circular**: es la parte del círculo limitada por un arco y su cuerda.
- **Corona circular:** es el espacio comprendido entre dos circunferencias con el mismo centro y distinto radio (concéntricas)

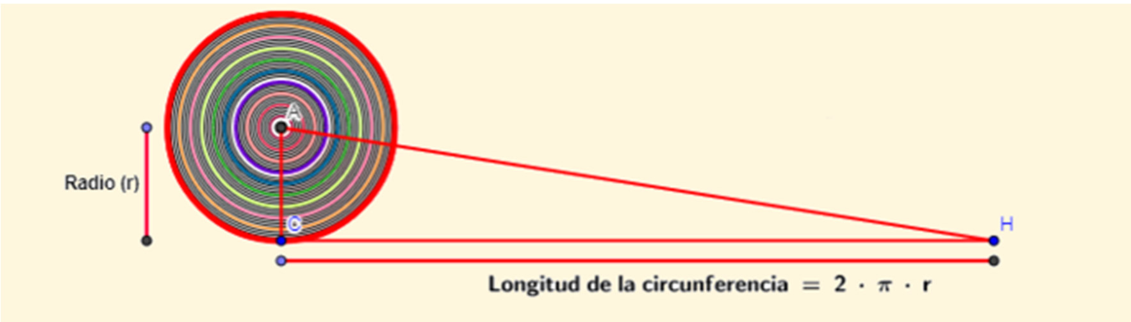
5.2.1) ÁREAS EN EL CÍRCULO

Área del círculo.

Desde la antigüedad se conocía la proporción existente entre el área del círculo y el cuadrado de su diámetro. Pero sería Arquímedes el que demostraría que el número que representa dicha proporción era el inconmensurable (*irracional*) $\boldsymbol{\pi}$.

En su obra Sobre la Medida del círculo, en el teorema I decía Arquímedes:

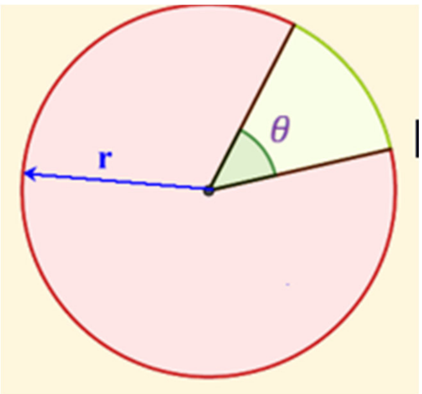
«El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la longitud de la circunferencia del propio círculo».



$$\acute{A}rea\ del\ C\acute{\imath}rculo = \acute{A}rea\ del\ Tri\acute{a}ngulo = \frac{Base.Altura}{2} = \frac{(2.\pi.r).r}{2} = \pi.r^2$$

Área del círculo = $\pi.r^2$

Área del sector circular.



Un sector circular es la parte de círculo delimitada por los lados de un ángulo central (θ) y el arco de circunferencia que definen los lados el ángulo.

Como conocemos el área del círculo y el valor del ángulo central completo 360° o $2.\pi$, al igual que hicimos al definir el arco de circunferencia, podremos establecer las siguientes proporciones para determinar el área del sector circular definida por el ángulo (θ):

Establecemos la siguiente proporción:

$$\frac{\pi.r^2}{360°} = \frac{Área_{sector}}{\theta°}$$

O bien si medimos en radianes

$$\frac{\pi.r^2}{2.\pi} = \frac{Área_{sector}}{\theta_{rad}}$$

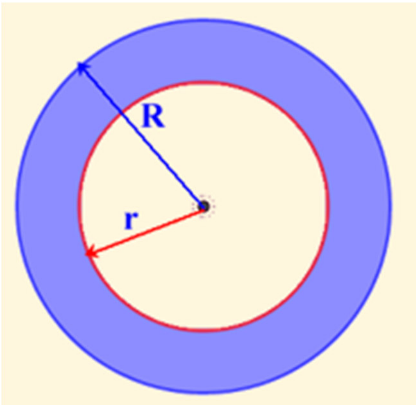
Por tanto el área del sector circular será:

$$Área_{sector} = \theta°.\frac{\pi.r^2}{360°}$$

Si el ángulo θ viene expresaso en radianes el área del sector será:

$$Área_{sector} = \theta_{rad}.\frac{r^2}{2}$$

Área de la corona circular.



La corona circular es una parte de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

Su área será la diferencia de áreas de dichas circunferencias.

$$Área_{corona} = \pi.(R^2 - r^2)$$

Practica con estos ejercicios:

http://www.accede-tic.es/circuloycircunferencia/menu.html

6) AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 30

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

	a) No existía las matemáticas hasta la época de la Grecia clásica.
	b) Euclides fue el primer matemático de la historia.
X	c) Euclides, bibliotecario de la biblioteca de Alejandría recopila y aporta los conocimientos matemáticos conocidos en su momento.

Ejercicio 31

La fórmula del área del círculo fue deducida por:

	a) Pitágoras.
	b) Eudoxo de Cinido.
X	c) Arquímedes de Siracusa.

Ejercicio 32

La condición de perpendicularidad de dos rectas es:

	a) Que formen dos ángulos consecutivos iguales
	b) Que forme dos ángulos adyacentes iguales
X	c) Las dos respuestas anteriores son correctas

Ejercicio 33

Si dos ángulos suman 90 º podremos decir de ellos que:

	a) Son suplementarios
	b) Son complementarios y obtusángulos
X	c) Son agudos y complementarios

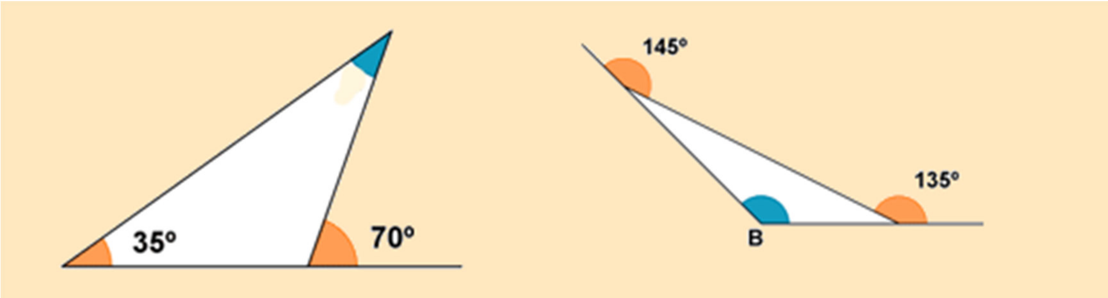
Ejercicio 34

Si el ángulo **β=** π**/3** y otro ángulo **μ=**π**/2, ¿cuál será el ángulo suma expresado en grados?**

X	a) El ángulo **β+ μ=135º**
	b) **β+ μ**=149º 59' 60"
	c) Aproximadamente 151º

Ejercicio 35

En la figura siguiente se representan dos triángulos, ¿Cuál sería el nombre correcto que les podríamos dar?:



	a) Acutángulo o Isósceles y Equilátero o escaleno
	b) Equilátero o Acutángulo y Escaleno y Obtusángulo
X	c) Obtusángulo o Isósceles y Escaleno u Obtusángulo

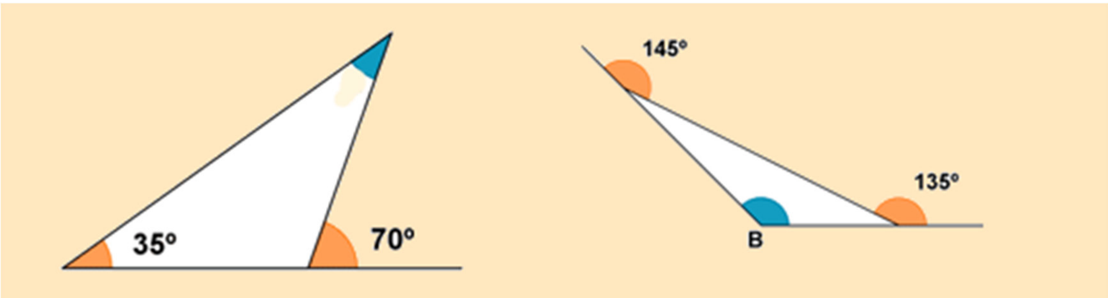
Ejercicio 36

La recta de Euler sustenta a:

	a) Ortocentro, Baricentro, Circuncentro e Icentro
X	b) Ortocentro, Baricentro, Circuncentro
	c) Las dos respuestas anteriores son erróneas

Ejercicio 37

¿Cuál es el valor de los ángulos A y B de los triángulos de la figura?



	a) A=45º, B=125º
	b) A=35º, B=155º
X	c) A=35º, B=100º

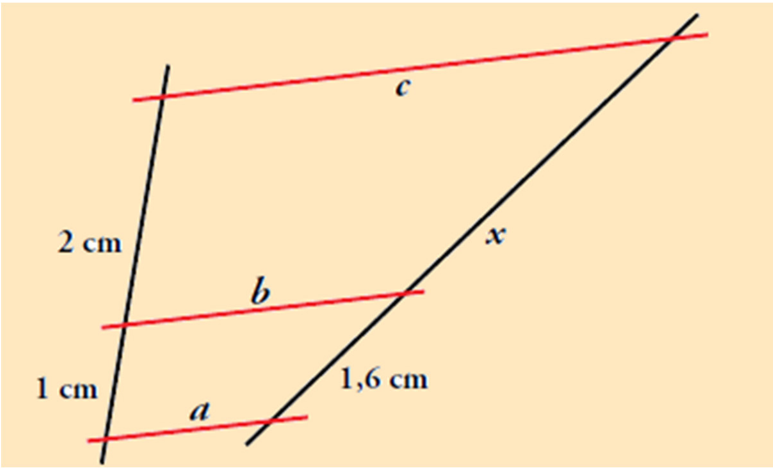
Ejercicio 38

Si dos triángulos tienen los tres ángulos internos iguales podemos afirmar:

	a) Con toda seguridad que son iguales
	b) Con toda seguridad que son semejantes
X	c) No podemos afirmar nada hasta conocer cómo son sus lados

Ejercicio 39

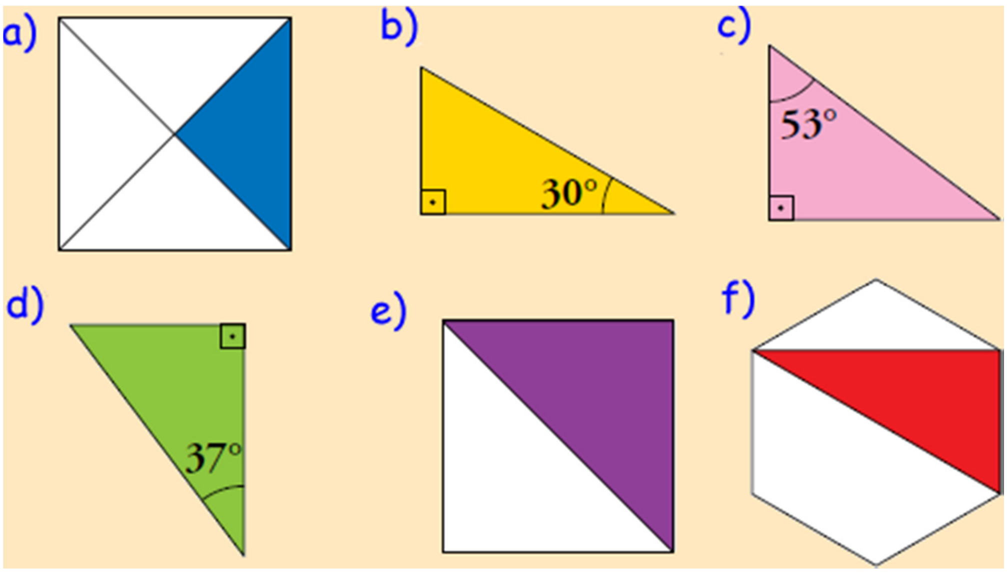
Observando el dibujo siguiente, ¿cuál es el valor del segmento X?



	a) x= 3 cm
	b) x= 3,4 cm
X	c) x= 3,2 cm

Ejercicio 40

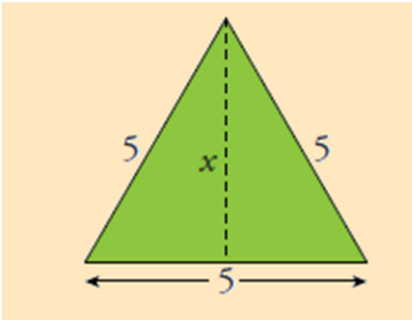
Entre los siguientes triángulos rectángulos hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente los ángulos que faltan.



	a) Son semejantes: b-f; a-d y e-c
	b) Son semejantes; b-f; e-d y a-c
X	c) Son semejantes; b-f; a-e y c-d

Ejercicio 41

Calcula la altura del siguiente triángulo.



	a) X=3,4
X	b) x=4,33
	c) x=4,5

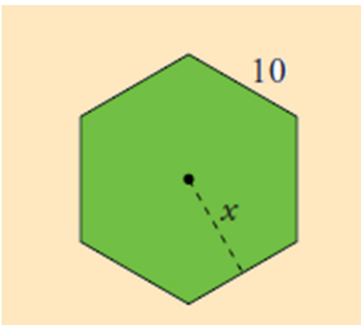
Ejercicio 42

¿Cómo denominarías a las siguientes figuras?

	a) Rombo y romboide
	b) Rectángulo y rombo
X	c) Romboide y rombo

Ejercicio 43

Determina el área del hexágono de la figura.



X	a) Área= 259,8 u^2
	b) Área= 250,8 u^2
	c) Área= 260 u^2

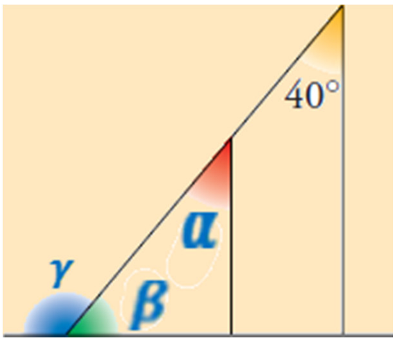
Ejercicio 44

Determina el área del trapecio isósceles de la figura.

X	a) Área=66,75 u^2
	b) Área=60,75 u^2
	c) Área=56,75 u^2

Ejercicio 45

Determina el valor de los ángulos de la figura.



	a) α=40º, β=50º; Υ=90º
X	b) α=40º, β=50º; Υ=130º
	c) α=50º, β=40º; Υ=90º

Ejercicio 46

Cuál es el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda que dista del centro 1,5 cm mide 7,2 cm.

	a) El radio de la circunferencia será de 8 cm
	b) El radio de la circunferencia será de 8,9 cm
X	c) El radio de la circunferencia será de 3,9 cm

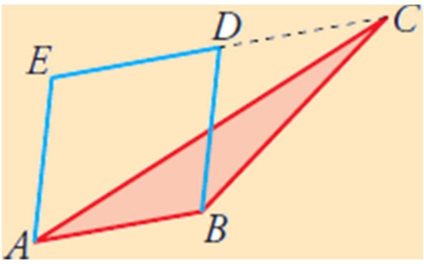
Ejercicio 47

La longitud de un arco de circunferencia de 60° de amplitud en una círculo de 12 cm de radio será:

	a) No podemos calcularlo porque solo tenemos el radio del círculo
X	b) El arco valdrá 4.π
	c) El arco valdrá 9,42 cm

Ejercicio 48

Si el área del triángulo ABC es 9,10 cm^2, ¿cuál es el área del paralelogramo ABDE?



	a) Nos faltan los datos de la base y de la altura
X	b) El doble que la del triángulo
	c) Cuatro veces la del triángulo

Ejercicio 49

En cuantas veces la longitud de la circunferencia excede a su diámetro.

	a) No se puede saber pues el diámetro es un segmento recto y la circunferencia es una línea curva
	b) Excede en dos veces a su diámetro
X	c) Excede en π veces a su diámetro

ENLACES DE INTERÉS

https://sites.google.com/site/todoesgeometria/construcciones-con-regla-y-compas/hallar-la-bisectriz-de-un-angulo-dado

Si deseas saber la historia de la geometría y más concretamente la del Teorema de Pitágoras puedes acceder a la siguiente página: http://poligonos1.blogspot.com

http://newton.matem.unam.mx/geometria

http://contenidos.educarex.es/mci/2004/18/alumno.htm

https://www.thatquiz.org/es/previewtest?Y/N/G/W/HHPQ1412568300

https://www.thatquiz.org/es/previewtest?C/V/D/J/35641286306728

https://www.thatquiz.org/es/previewtest?I/E/S/R/03961270914006

https://www.thatquiz.org/es/previewtest?J/T/A/I/17711511965810

https://www.thatquiz.org/es/previewtest?6/X/L/B/QVJ51400526643

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Selecciona las respuestas correctas.

	Todas las rectas secantes son perpendiculares.
X	Todas las rectas perpendiculares son secantes
	Las rectas paralelas sólo tienen un punto en común
X	Un ángulo define una porción infinita de plano
	El matemático griego que recopila el conocimiento antiguo de su época fue Pitágoras
X	A la geometría clásica también le llamamos Euclídea
	Antes de la cultura helenística (600 a.C) no existía la matemática

Ejercicio 2

¿Cuál es el nombre de las siguientes letras griegas?

π	**Pi**
α	**Alfa**
γ	**Gamma**
β	**Beta**
λ	**Lambda**
μ	**Mu**
ω	**Omega**

Ejercicio 3

Realiza las siguientes operaciones con ángulos.

35º 33' 54'' + 7º 42' 25'' = <u>43</u> º <u>16</u> ' <u>19</u> ''

Ejercicio 4

Determina el valor en radianes de los siguientes ángulos:

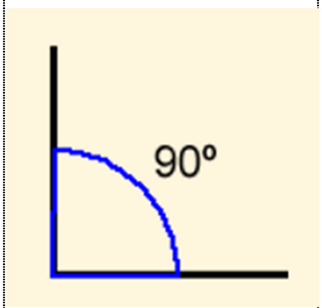
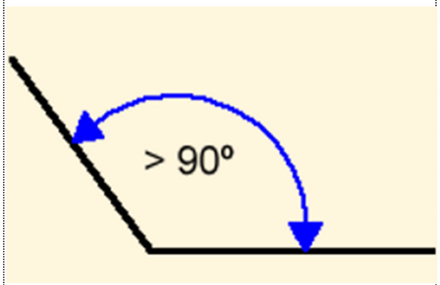
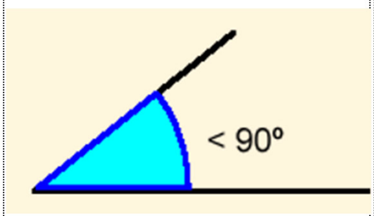
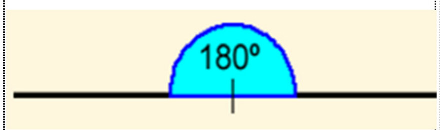
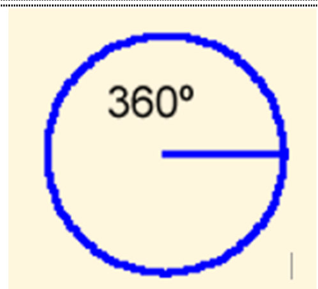
a) μ= 60º $\frac{\Pi}{180^o}=\frac{\mu_{rad}}{60^o}\Longrightarrow \mu_{rad}=60^o.\frac{\Pi}{180^o}=\frac{\Pi}{3}$

b) β= 150º $\frac{\Pi}{180^o}=\frac{\beta_{rad}}{150^o}\Longrightarrow \beta_{rad}=150^o.\frac{\Pi}{180^o}=\frac{5.\Pi}{6}$

c) θ= 270º $\frac{\Pi}{180^o}=\frac{\theta_{rad}}{270^o}\Longrightarrow \theta_{rad}=270^o.\frac{\Pi}{180^o}=\frac{3.\Pi}{2}$

Ejercicio 5

¿Cómo se denominan estos ángulos?

		
Recto	**Obtuso**	**Agudo**
		
	Llano	**Completo**

Ejercicio 6

Indica si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:

Dos ángulos adyacentes son aquellos que:

	V / F
Suman 90°	F
Suman 45°, tienen el vértice común, un lado común y los otros lados son uno prolongación del otro	F
Siendo suplementarios, tienen el vértice común, un lado común y los otros lados son uno prolongación del otro	V

Ejercicio 7

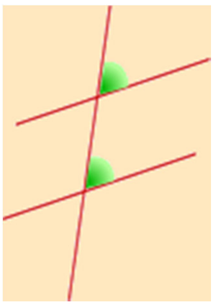
¿Qué podríamos decir que todos los ángulos adyacentes son consecutivos o que todos los ángulos consecutivos son adyacentes?

La categoría general es el de ángulo consecutivo y dentro de esta categoría hay unos ángulos particulares que se les denomina adyacentes.

Por tanto todos los ángulos adyacentes son consecutivos, pero no todos los ángulos consecutivos son adyacentes.

Ejercicio 8

Indica si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:



De los ángulos de la figura podemos decir que …..

	V / F
Son iguales por ser ángulos internos	F
Son iguales por ser externos internos	F
Ninguna de las anteriores es correcta	V

Son iguales por ser ángulos correspondientes y por lo tanto tienen sus lados paralelos.

Ejercicio 9

¿Cuál será el valor mínimo que puede tener un ángulo Cóncavo?

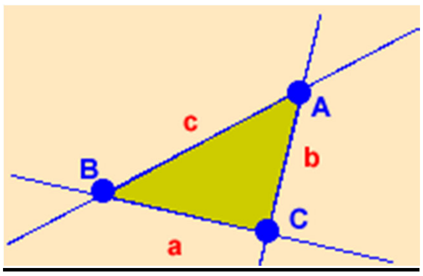
El valor mínimo que puede valor un ángulo cóncavo es de 180º, luego todos los ángulos cóncavos son mayores o iguales a 180º.

Ejercicio 10

¿Cuál es el número de segmentos rectilíneos mínimos que se necesita para formar un polígono cerrado?

Si los segmentos rectilíneos sólo pueden unirse por sus extremos, para cerrar un polígono, ¿podrán ser estos segmentos de la longitud que se desee o tendrá que cumplir alguna condición?

a) Necesitaríamos tres segmentos que se corten dando puntos de intersección no alineados.



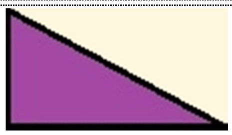
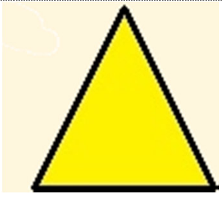
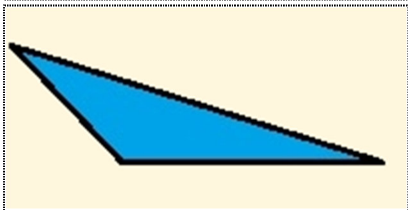
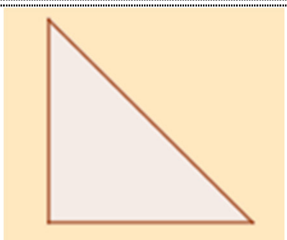
b) No pueden ser de cualquier longitud, deben cumplir la desigualdad triángular o desigualdad de **Minkowski.**

En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor que la longitud del lado restante.

a+b>c; a+c>b; b+c>a

Ejercicio 11

Clasifica los siguientes triángulos atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

TRIÁNGULO	SEGÚN SUS LADOS	SEGÚN SUS ÁNGULOS
	**Isósceles**	**Acutángulo**
	**Escaleno**	**Rectángulo**
	**Equilátero**	**Acutángulo**
	**Escaleno**	**Obtusángulo**
	**Isósceles**	**Rectángulo**

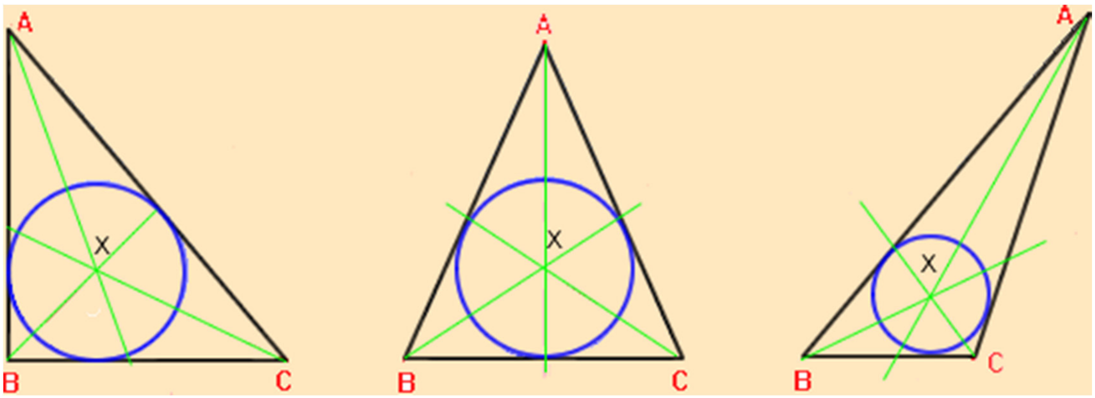
Ejercicio 12

¿Cuantos ángulos obtusos puede tener un triángulo?

X	a) Como mucho uno
	b) No puede tener ninguno
	c) Como mucho dos

Ejercicio 13

Analizando los triángulos siguientes podríamos decir que el punto x es:



	a) El Ortocentro del triángulo por ser sus lados tangentes a la circunferencia inscrita.
X	b) El Icentro del triángulo, por encontrase siempre en el interior del triángulo.
	c) El circuncentro del triángulo por ser el centro de la circunferencias inscrita.

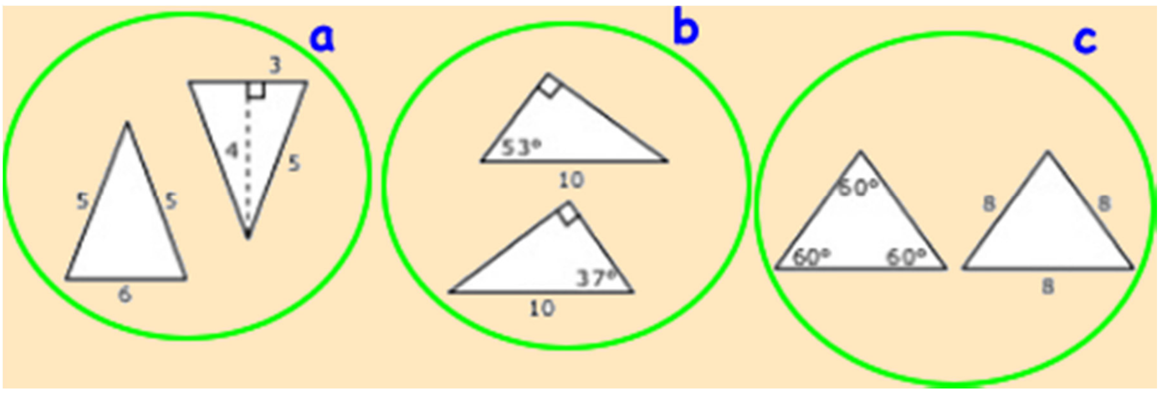
Ejercicio 14

¿Por qué el centro de un triángulo siempre es un punto interior al mismo y nunca exterior?

Porque es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo y centro de la circunferencia inscrita. Si estuviese fuera del triángulo no podría ser el centro de dicha circunferencia inscrita al no equidistar de los lados.

Ejercicio 15

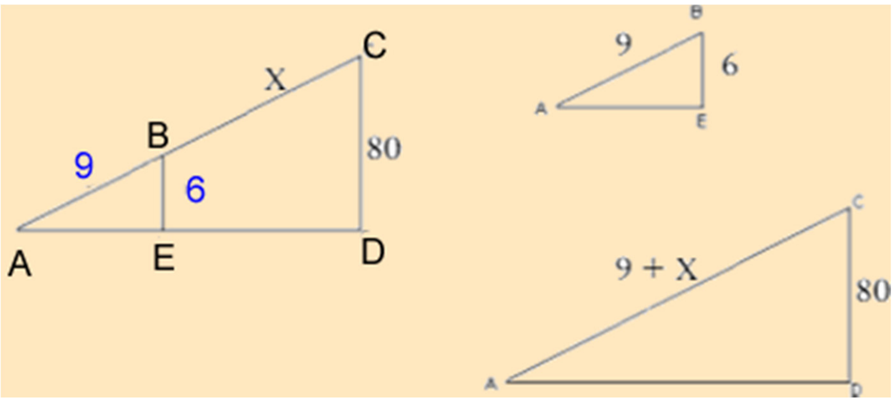
De los triángulos de la figura siguiente podemos decir que:



	a) La pareja de triángulos del grupo "a" son los únicos congruentes del dibujo.
	b) Solo son congruentes los triángulos del grupo a y b.
X	c) Todos los triángulos son congruentes.

Ejercicio 16

Conociendo la información aportada en la figura, determina la longitud del segmento BC.



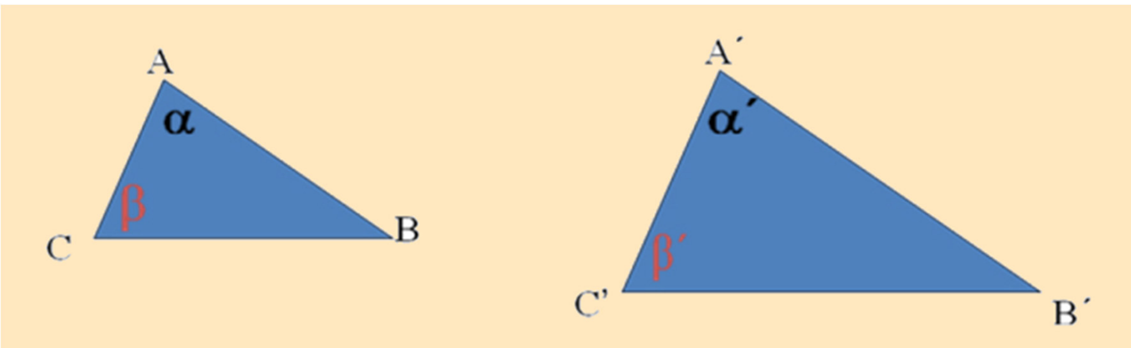
$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ Por tanto $\frac{6}{80} = \frac{9}{9+x}$

Luego $6.(9+x) = 9.(80) \Rightarrow 54 + 6.x = 720 \Rightarrow 6.x = 720 - 54 = 666$

De donde deducimos que $x = \frac{666}{6} = 111$

Ejercicio 17

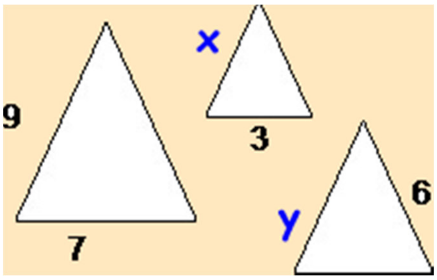
¿Por qué son semejantes estos triángulos?



Pues al tener dos ángulos conocidos iguales, el tercero desconocido debe ser también igual, por tanto estamos ante dos triángulos que tienes los tres ángulos iguales, luego solo hay dos posibilidades que los lados sean iguales o que sean proporcionales, como iguales no son pues no tienen el mismo tamaño, son por tanto proporcionales y los triángulos pro consiguiente semejantes.

Ejercicio 18

Calcula el valor de los lados de estos triángulos isósceles.



Solución: 3,8 y 4,6

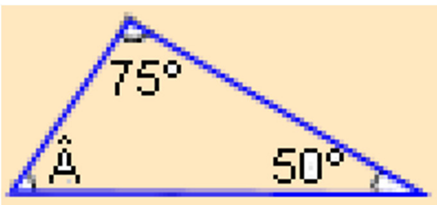
Ejercicio 19

La siguiente terna de números (20,101,99), ¿es una terna pitagórica?

X	a) Si por que el área del cuadrado de lado 20 sumada al área del cuadrado de lado 99, es igual al área del cuadrado de lado 101
	b) No es una terna pitagórica, porque no cumple el teorema de Pitágoras
	c) No porque no se verifica la desigualdad triangular

Ejercicio 20

En el triángulo de la figura, calcula cuánto mide el ángulo A.



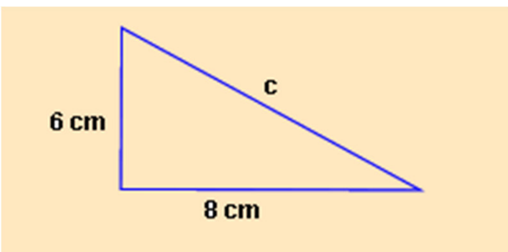
75º + 50º = 125º

180º – 125º = 55º

El ángulo A mide 55º

Ejercicio 21

En un triángulo rectángulo, los dos catetos miden 8 y 6 cm, respectivamente. Dibuja el triángulo y calcula el valor de la hipotenusa.



6^2 + 8^2 = H^2

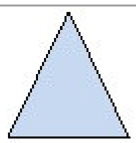
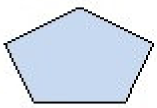
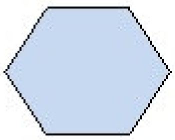
36 + 64 = H^2

100 = h^2

h = √100 = 10 cm

Ejercicio 22

Completa la siguiente tabla:

Figuras	Lados	Vértices	Ángulos	Diagonales
	3	3	3	0
	4	4	4	2
	5	5	5	5
	6	6	6	9

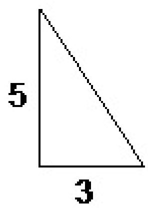
Ejercicio 23 (interactivo)

https://www.geogebra.org/m/114518

Ejercicio 24

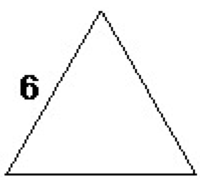
Calcula la superficie y el perímetro de los siguientes triángulos, utilizando, si es preciso, el teorema de Pitágoras.

a)

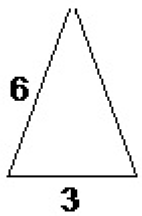


***Área=7'5 u²*; perímetro=13,83 u**

b)

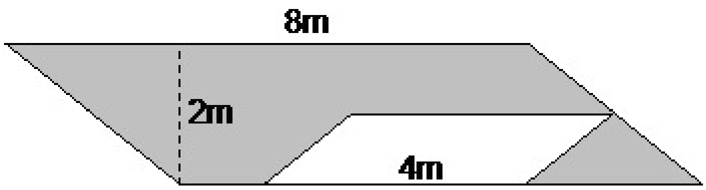


***Área=15,6 u²*; perímetro=18 u**

c)  ______ ***Área*=8,7 *u*^{2}; perímetro=15 u**

<u>Ejercicio 25</u>

Determina el área de la zona sombreada:

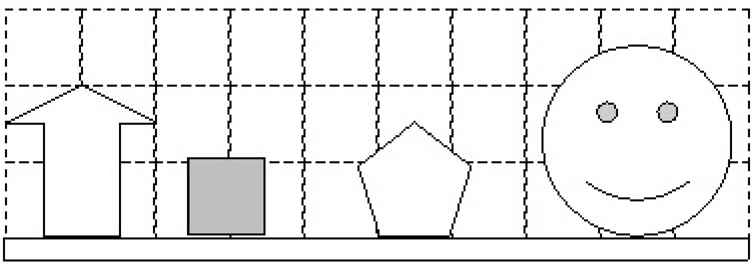


El área de la zona sombreada es de 12 m^2

<u>Ejercicio 26</u>

El dibujo siguiente está hecho a escala 1:10.000, y el lado de cada cuadrado de la retícula mide 1cm.

¿Cuál es la altura real, en metros, de los objetos representados en la figura?



Flecha _200m_ Cuadrado _100m_ Pentágono _150m_ Cara __250m__

Ejercicio 27

En un plano a escala 1:50.000, se desea saber que longitud tiene un tramo de camino que mide en el plano 60 cm.

Si hubiésemos consultado un plano que estuviese a escala 1:30.000. ¿Cuantos centímetros sobre dicho plano hubiésemos medido?

a)

$$E = \frac{1}{50.000} = \frac{60\ cm}{x_R}$$

$$x_R = 50.000.(60\ cm) = 3000000cm = 3000000cm.\frac{1\ m}{100\ cm} = 30000\ m$$

$$= 30000\ m.\frac{1\ km}{1000\ m} = 30\ km$$

b)

$$E = \frac{1}{30.000} = \frac{y_p}{3000000cm}$$

$$y_p = \frac{1}{30.000}.3000000\ cm = 100\ cm$$

Ejercicio 28

El carro de un señor que se llamaba Manolo Escobar tiene unas ruedas cuyo diámetro mide 2 metros.

¿Cuánta distancia habría recorrido Manolo antes de que le robaran el carro si cada rueda ha dado 130 vueltas?

Por cada vuelta que de la rueda la longitud lineal recorrida será la longitud de la circunferencia que define la rueda, como da 130 vueltas será 130 veces dicho perímetro circular, por tanto:

L/d = π, luego L=d.π **= 2. 3,1416=6,28 m por vuelta.**

Luego la longitud lineal recorrida por el carro será: 6,28 .130=recorrida será de ***816'81 metros***

Ejercicio 29

$si\ \pi = \frac{L}{d}$ y decimos que pi es un número irracional entonces ¿cómo podemos expresarlo como cociente de dos números? ¿Son enteros dichos números?

La irracionalidad de π significa que no existe una longitud común que pueda dividir tanto a L como a d.

Por otra parte como π es irracional significa que o L o d, deben ser irracionales, pero como d podemos cogerlo de un valor exacto, significa que la irracionalidad en la proporción l/d la aporta el número que determina la longitud de la circunferencia, puede dicha longitud solo podemos medirla de manera aproximada.

Ejercicio 30

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

	a) No existía las matemáticas hasta la época de la Grecia clásica.
	b) Euclides fue el primer matemático de la historia.
X	c) Euclides, bibliotecario de la biblioteca de Alejandría recopila y aporta los conocimientos matemáticos conocidos en su momento.

Ejercicio 31

La fórmula del área del círculo fue deducida por:

	a) Pitágoras.
	b) Eudoxo de Cinido.
X	c) Arquímedes de Siracusa.

Ejercicio 32

La condición de perpendicularidad de dos rectas es:

	a) Que formen dos ángulos consecutivos iguales
	b) Que forme dos ángulos adyacentes iguales
X	c) Las dos respuestas anteriores son correctas

Ejercicio 33

Si dos ángulos suman 90 º podremos decir de ellos que:

	a) Son suplementarios
	b) Son complementarios y obtusángulos
X	c) Son agudos y complementarios

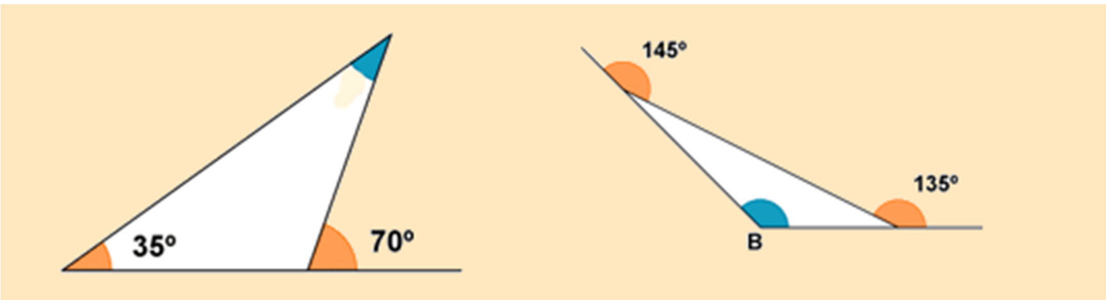
Ejercicio 34

Si el ángulo β= $\pi/3$ y otro ángulo μ=$\pi/2$, ¿cuál será el ángulo suma expresado en grados?

X	a) El ángulo **β+ μ=135º**
	b) **β+ μ**=149º 59' 60"
	c) Aproximadamente 151º

Ejercicio 35

En la figura siguiente se representan dos triángulos, ¿Cuál sería el nombre correcto que les podríamos dar?:



	a) Acutángulo o Isósceles y Equilátero o escaleno
	b) Equilátero o Acutángulo y Escaleno y Obtusángulo
X	c) Obtusángulo o Isósceles y Escaleno u Obtusángulo

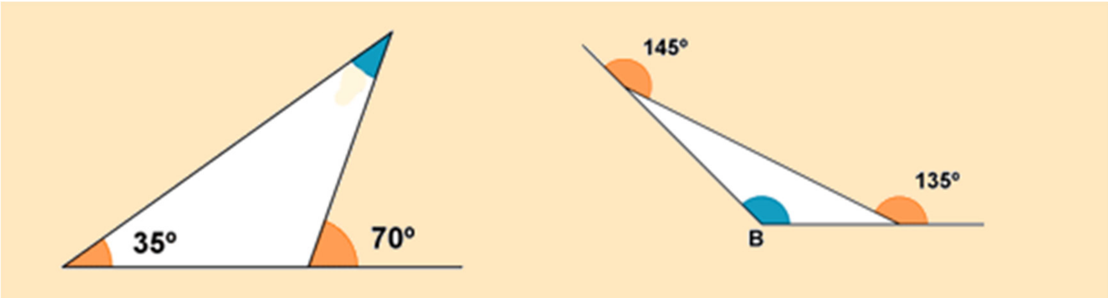
Ejercicio 36

La recta de Euler sustenta a:

	a) Ortocentro, Baricentro, Circuncentro e Icentro
X	b) Ortocentro, Baricentro, Circuncentro
	c) Las dos respuestas anteriores son erróneas

Ejercicio 37

¿Cuál es el valor de los ángulos A y B de los triángulos de la figura?



	a) A=45º, B=125º
	b) A=35º, B=155º
X	c) A=35º, B=100º

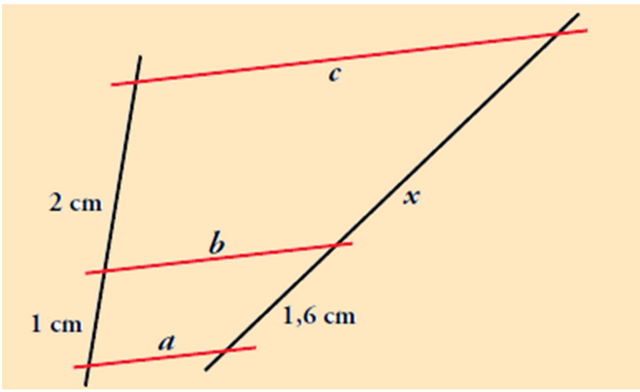
Ejercicio 38

Si dos triángulos tienen los tres ángulos internos iguales podemos afirmar:

	a) Con toda seguridad que son iguales
	b) Con toda seguridad que son semejantes
X	c) No podemos afirmar nada hasta conocer cómo son sus lados

Ejercicio 39

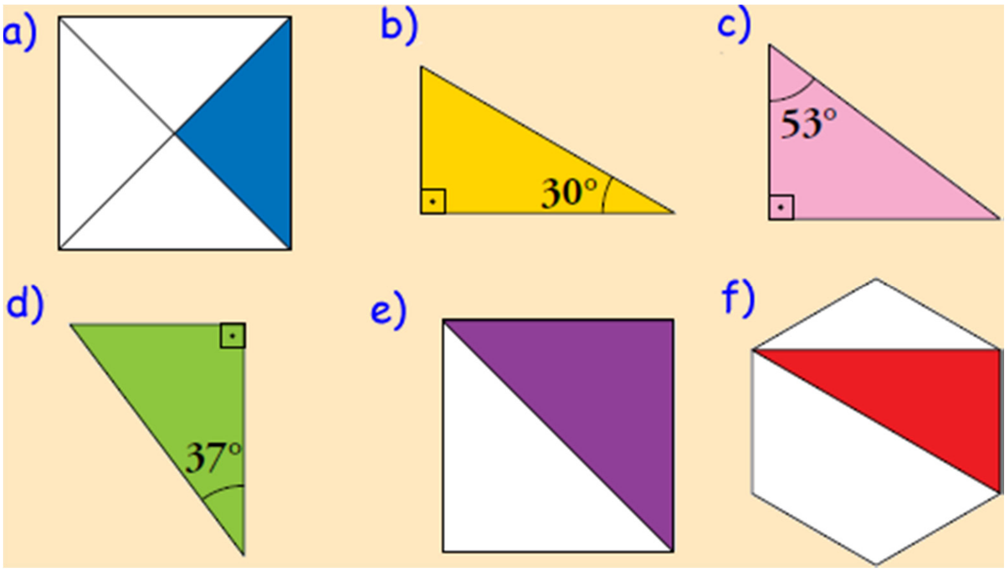
Observando el dibujo siguiente, ¿cuál es el valor del segmento X?



	a) x= 3 cm
	b) x= 3,4 cm
X	c) x= 3,2 cm

Ejercicio 40

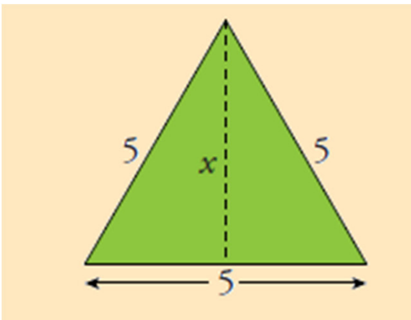
Entre los siguientes triángulos rectángulos hay algunos semejantes entre sí. Averigua cuáles son calculando previamente los ángulos que faltan.



	a) Son semejantes: b-f; a-d y e-c
	b) Son semejantes; b-f; e-d y a-c
X	c) Son semejantes; b-f; a-e y c-d

Ejercicio 41

Calcula la altura del siguiente triángulo.



	a) X=3,4
X	b) x=4,33
	c) x=4,5

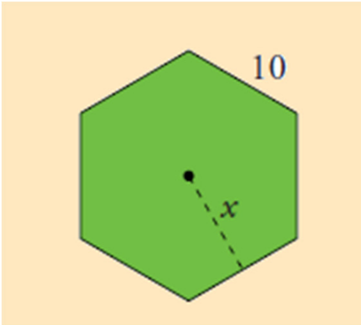
Ejercicio 42

¿Cómo denominarías a las siguientes figuras?

	a) Rombo y romboide
	b) Rectángulo y rombo
X	c) Romboide y rombo

Ejercicio 43

Determina el área del hexágono de la figura.



X	a) Área= 259,8 u^2
	b) Área= 250,8 u^2
	c) Área= 260 u^2

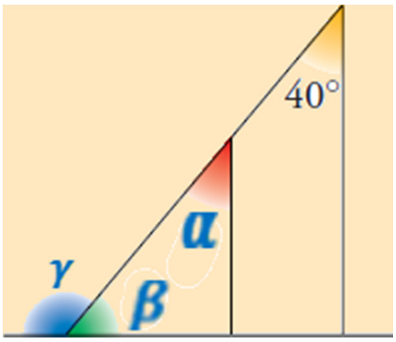
Ejercicio 44

Determina el área del trapecio isósceles de la figura.

X	a) Área=66,75 u^2
	b) Área=60,75 u^2
	c) Área=56,75 u^2

Ejercicio 45

Determina el valor de los ángulos de la figura.



	a) α=40º, β=50º; Υ=90º
X	b) α=40º, β=50º; Υ=130º
	c) α=50º, β=40º; Υ=90º

Ejercicio 46

Cuál es el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda que dista del centro 1,5 cm mide 7,2 cm.

	a) El radio de la circunferencia será de 8 cm
	b) El radio de la circunferencia será de 8,9 cm
X	c) El radio de la circunferencia será de 3,9 cm

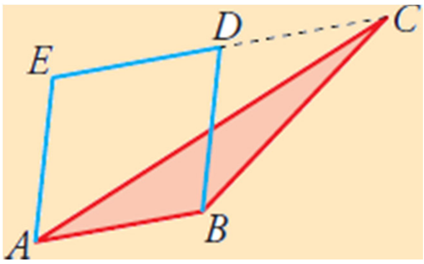
Ejercicio 47

La longitud de un arco de circunferencia de 60° de amplitud en una círculo de 12 cm de radio será:

	a) No podemos calcularlo porque solo tenemos el radio del círculo
X	b) El arco valdrá 4.π
	c) El arco valdrá 9,42 cm

Ejercicio 48

Si el área del triángulo ABC es 9,10 cm2, ¿cuál es el área del paralelogramo ABDE?



	a) Nos faltan los datos de la base y de la altura
X	b) El doble que la del triángulo
	c) Cuatro veces la del triángulo

Ejercicio 49

En cuantas veces la longitud de la circunferencia excede a su diámetro.

	a) No se puede saber pues el diámetro es un segmento recto y la circunferencia es una línea curva
	b) Excede en dos veces a su diámetro
X	c) Excede en π veces a su diámetro