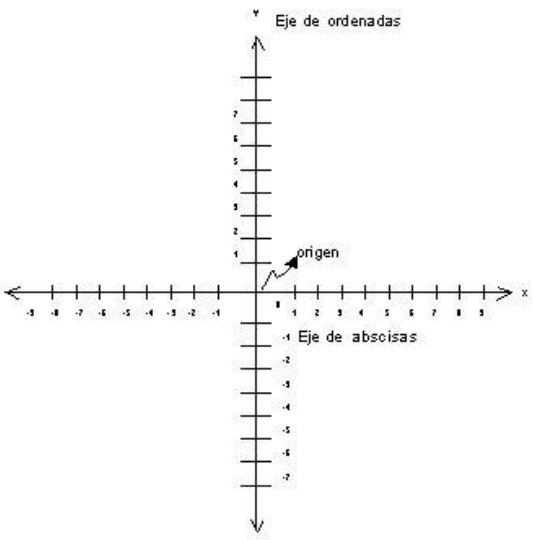
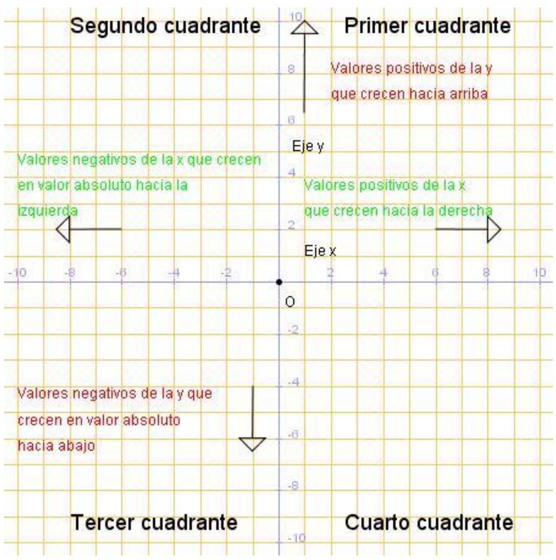
Bloque 2. Geometría

3. La recta

1. Definición de recta

Para representar puntos en un plano (superficie de dos dimensiones) utilizamos dos rectas graduadas y perpendiculares, cuyo corte es el punto 0 de ambas u origen de coordenadas. A la recta horizontal se le denomina eje de abcisas o eje OX, mientras que a la vertical se le denomina eje de ordenadas o eje OY.





2. Ecuación vectorial

Definimos una recta r como el conjunto de los puntos del plano, alineados con un punto P y con una dirección dada $\vec{v}$.

Si $P(x_1, y_1)$ es un punto de la recta r, el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{v}$, luego es igual a $\vec{v}$ multiplicado por un escalar:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$$

Ejemplo: Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ = (2,5). Escribir su ecuación vectorial.

$$(x, y) = (-1, 3) + k \cdot (2, 5)$$

3. Ecuaciones paramétricas

A partir de la ecuación vectorial:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$$

Realizando las operaciones indicadas se obtiene:

$$(x, y) = (x_1 + k \cdot v_1, y_1 + k \cdot v_2)$$

La igualdad de vectores se desdobla en las dos igualdades escalares:

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases}$$

Ejemplo: Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ = (2,5). Escribir sus ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$$

4. Ecuación continua

Si de las ecuaciones paramétricas despejamos el parámetro k.

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad k = \frac{x - x_1}{v_1} \qquad k = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y si igualamos, queda:

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Ejemplo: Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ ***= (2,5). Escribir su ecuación continua.***

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{5}$$

5. Ecuación general

Partiendo de la ecuación continua la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y quitando denominadores se obtiene:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1 \qquad v_2 x - v_2 x_1 = v_1 y - v_1 y_1$$

Trasponiendo términos:

$$v_2 x - v_1 y + v_1 y_1 - v_2 x_1 = 0$$

Haciendo

$$A = v_2 \qquad B = -v_1 \qquad C = v_1 y_1 - v_2 x_1$$

Se obtiene

$$Ax + By + C = 0$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación **general o implicita de la recta**. De esta forma se acostumbra a dar la respuesta cuando se pide la ecuación de una recta.

Las componentes del vector director son:

$$\vec{v} = (-B,\ A)$$

La pendiente de la recta es:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la que pasa por A (1,5) y tiene como vector director $\vec{v}$ ***igual (-2, 1).***

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-5}{1} \qquad x - 1 = -2y + 10$$

$$x + 2y - 11 = 0$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la que pasa por A (1,5) y tiene como pendiente m = -2.

$$y - 5 = -2(x-1) \qquad y - 5 = -2x + 2$$

$$2x + y - 7 = 0$$

6. Ecuación explícita

Si en la **ecuación general de la recta:**

$$Ax + By + C = 0$$

despejamos **y**, se obtiene la **ecuación explícita de la recta**:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$y = mx + b$$

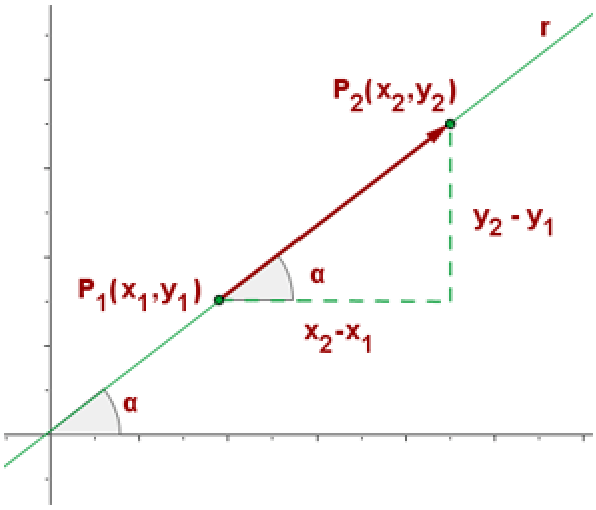
El coeficiente de la x es la pendiente, m. El término independiente, b, se llama ordenada en el origen de una recta, siendo (O, b) el punto de corte con el eje OY

Ejemplo: Hallar la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por A (1,5) y tiene como pendiente m=-2.

$$y - 5 = -2(x - 1) \qquad y - 5 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 7$$

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje OX.



Pendiente dado el ángulo

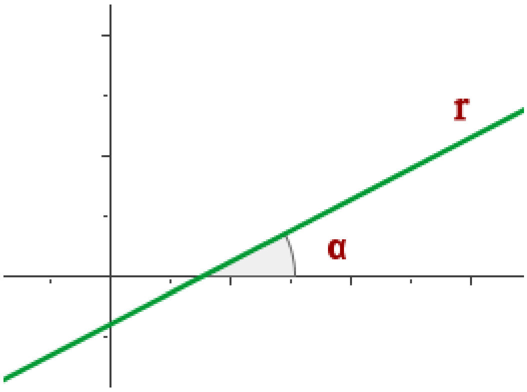
$$m = tg\ \alpha$$

Pendiente dado el vector director de la recta

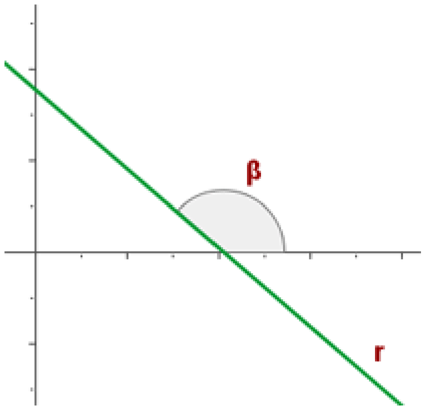
$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Pendiente dados dos puntos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Si el **ángulo** que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **agudo**, la **pendiente** es **positiva** y crece al crecer el ángulo.



Si el **ángulo** que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **obtuso**, la **pendiente** es **negativa** y decrece al crecer el ángulo.

7. Ecuación punto-pendiente

Partiendo de la ecuación continua la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y quitando denominadores:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1$$

Y despejando:

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_1)$$

Como

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo: Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ = (2,5). Escribir su ecuación punto pendiente.

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 1)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasan por los puntos A(-2, -3) y B(4,2).

$$m = \frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6} \qquad y + 3 = \frac{5}{6}(x + 2)$$

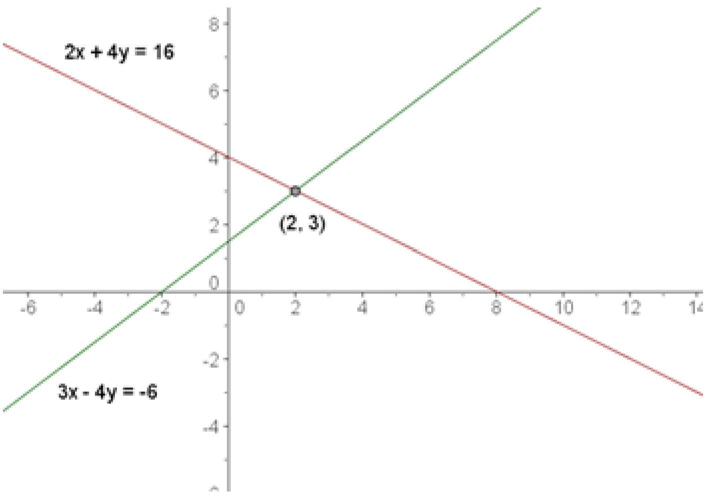
Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasan por A(-2, -3) y tenga una inclinación de 45°.

$$tg\ 45° = 1 \qquad y + 3 = x + 2$$

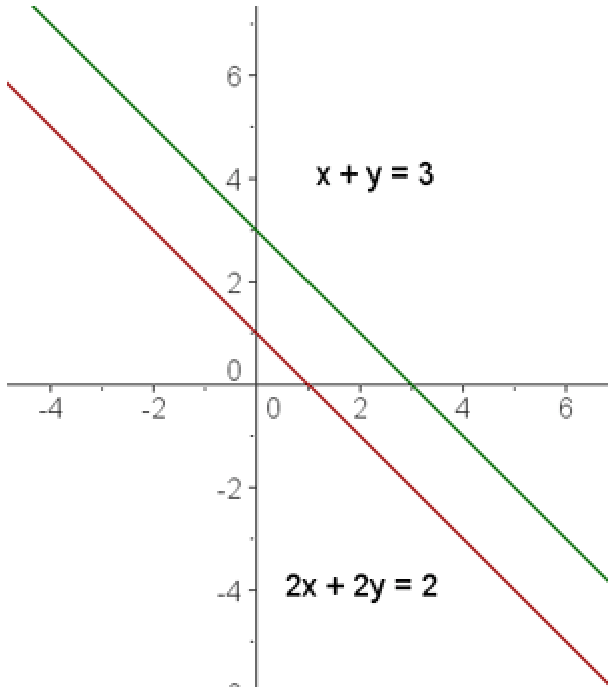
8. Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas, Ax + By + C = 0, A'x + B'y + C' = 0, para calcular su posición relativa tendremos en cuenta que:

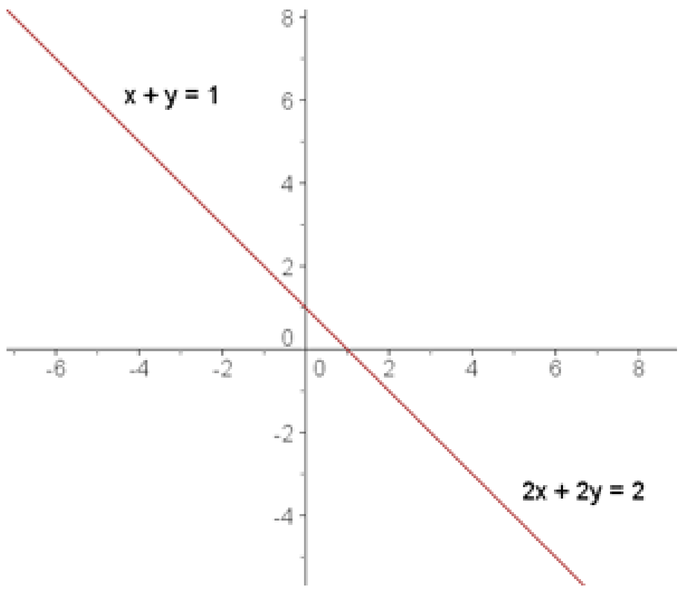
1) Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, **las rectas son secantes, se cortan en un punto.**



2) Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ **, las rectas paralelas, no se cortan en ningún punto.**



3) Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ **, las rectas son coincidentes, todos sus puntos son comunes.**



Ejemplos

Estudia las **posiciones relativas** de los siguientes pares de **rectas**:

$$\begin{cases} r \equiv 2x + 3y - 1 = 0 \\ s \equiv 4x + 6y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{-5} \qquad \text{Paralelas}$$

$$\begin{cases} r \equiv x - 2y + 3 = 0 \\ s \equiv -2x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} \qquad \text{Coincidentes}$$

$$\begin{cases} r \equiv y = 2x + 1 \\ s \equiv y = 2x - 5 \end{cases} \qquad m_r = m_s = 2 \qquad \text{Paralelas}$$

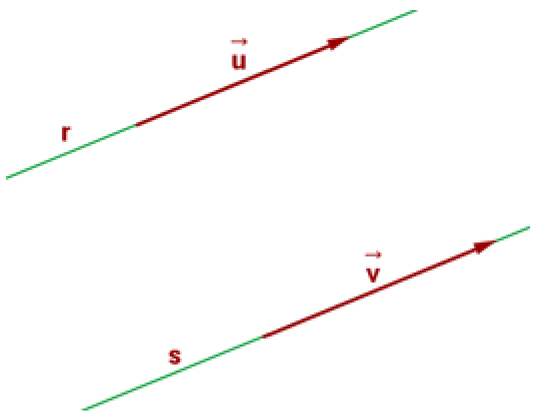
¿Son secantes las rectas r ≡ x +y -2 = 0 y s ≡ x - 2 y + 4 = 0? En caso afirmativo calcular el punto de corte.

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2} \qquad \text{Sí}$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \qquad r \cap s = P(0, 2)$$

Nota: el punto de corte se conoce resolviendo el sistema de ecuaciones de dos incógnitas que forman las ecuaciones de las rectas.

9. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad



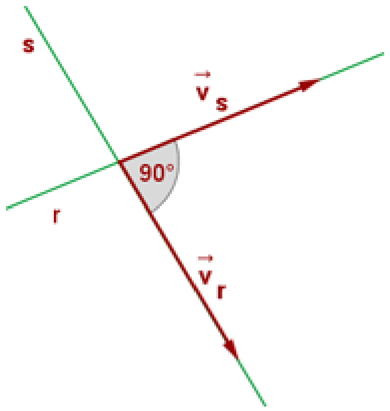
Dos rectas son paralelas si tienen el mismo vector director o la misma pendiente.

$$\vec{u} = \vec{v}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

$$m_r = m_s$$

$$r \parallel s \qquad \begin{matrix} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ \\ s \equiv Ax + By + k = 0 \quad k \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad \vec{v}_r = \vec{v}_s = (-B, A)$$



Dos rectas son perpendiculares tienen sus pendientes inversas y cambiadas de signo.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

$$r \perp s \qquad r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad \vec{v}_r = (-B, A)$$

$$s \equiv -Bx + Ay + k = 0 \quad k \in \mathbb{R} \qquad \vec{v}_s = (A, B)$$

Ejemplo: Hallar una recta paralela y otra perpendicular a r ≡ x + 2y + 3 = 0, que pasen por el punto A(3,5).

$$m_r \parallel m_s$$

$$m_r = m_s = -\frac{1}{2}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad 2y - 10 = -x + 3$$

$$x + 2y - 13 = 0$$

$$m_r \perp m_s$$

$$m_r = -\frac{1}{2} \qquad m_s = 2$$

$$y - 5 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$2x - y - 1 = 0$$

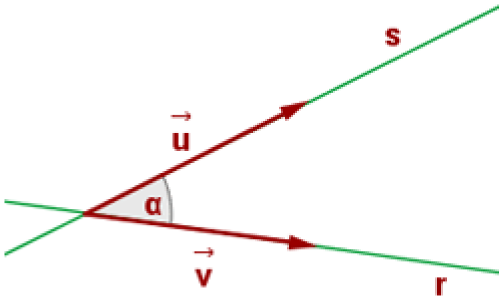
***Ejemplo: Calcula** k **para que las rectas r ≡ x + 2y - 3 = 0 y s ≡ x - ky + 4 = 0, sean paralelas y perpendiculares**.*

$$m_r = -\frac{1}{2} \qquad\qquad m_s = \frac{1}{k}$$

$r \parallel s \qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{k} \qquad k = -2$

$r \perp s \qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{-\frac{1}{k}} \qquad \frac{1}{2} = k$

10. Ángulo entre dos rectas secantes



Se llama ángulo de dos rectas al menor de los ángulos que forman éstas. Se pueden obtener a partir de:

1) Sus vectores directores

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

2) Sus pendientes

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|$$

Ejemplo: Calcular el ángulo que forman las rectas r y s, sabiendo que sus vectores directores son: $\vec{u}$ ***= (-2, 1) y*** $\vec{v}$ ***=(2, -3).***

$$\cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(2,-3)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{|-7|}{\sqrt{65}} = 0.868$$

$$\alpha = 29^{\circ}\ \ 44'$$

Ejemplo: Dadas las rectas r ≡ 3x + y - 1 = 0 y s ≡ 2x + my - 8 = 0, determinar m para que formen un ángulo de 45°.

$$\alpha = 45^\circ \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-1\cdot(-m)+3\cdot 2}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{m^2+4}} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+6}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{m^2+4}}\right)^2$$

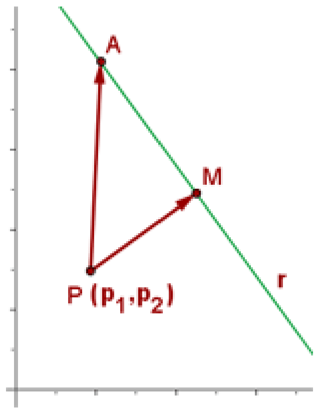
$$\frac{36+12m+m^2}{10(4+m^2)} = \frac{1}{2} \qquad m^2-3m-4=0$$

$$m_1 = 4 \qquad m_2 = -1$$

11. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B es el módulo del vector que forman ambos puntos.

12. Distancia entre un punto y una recta



La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

$$d(P,r) = |\overrightarrow{PM}|$$

$$d(P,r) = \frac{|A\cdot p_1 + B\cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo: Calcula la distancia del punto P(2,- 1) a la** recta **r de ecuación 3 x + 4 y = 0.

$$d(P,r) = \frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5}$$

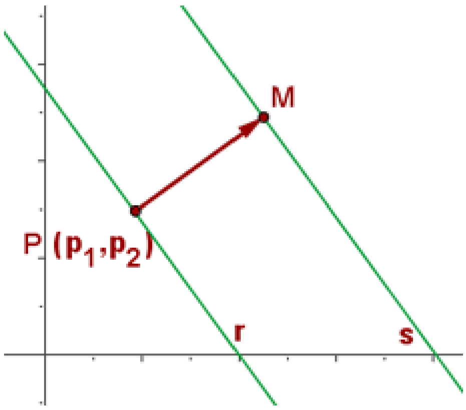
De aquí se puede deducir la distancia de una recta al origen de coordenadas como:

$$d(O,r) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo: Hallar la distancia al origen de la recta r ≡ 3x - 4y - 25 = 0.

$$d(O,r) = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

13. Distancia entre dos rectas paralelas



Para hallar la distancia entre dos en rectas paralelas, se toma un punto cualquiera, P, de una de ellas y calcular su distancia a la otra recta. (Si las rectas se cortan la distancia es cero)

$$d(r,s) \;=\; d(P,s)$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre r ≡ 3 x - 4 y + 4 = 0 y s ≡ 9 x - 12 y - 4 = 0.

$$\frac{3}{-4} = \frac{9}{-12} \qquad -36 = -36 \qquad r \parallel s$$

$$3 \cdot 0 - 4y + 4 = 0 \qquad y = 1$$

$$P(0,1) \in r$$

$$d(P,s) = \frac{|9 \cdot 0 - 12 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{16}{15}$$

Otra manera de expresar la distancia entre dos rectas es:

$$d(r,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

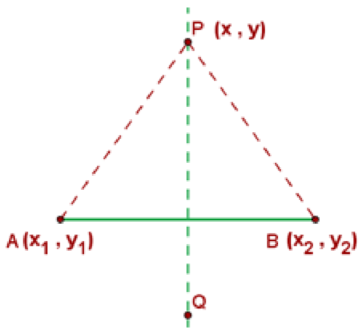
Ejemplo: Hallar la distancia entre las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x=2-3k\\ y=1+k\end{cases}\qquad\qquad s\equiv\frac{x+3}{-3}=\frac{y+5}{1}$$

$$r\equiv x+3y-5=0\qquad\qquad s\equiv x+3y+18=0$$

$$d(r,s)=\frac{|18+5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{23}{\sqrt{10}}$$

14. Lugares geométricos



Mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos.

Ecuación de la mediatriz

$$d(P,A)=d(P,B)$$

$$P(x,y)\qquad A(x_1,y_1)\qquad B(x_2,y_2)$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

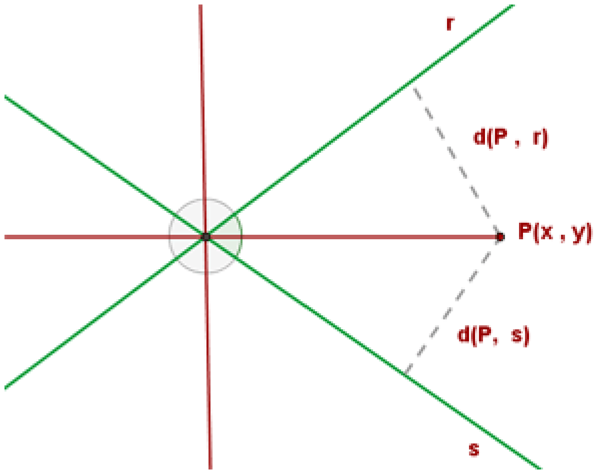
Ejemplo: Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A(2 , 5) y B(4, -7).

$$d(P,A)=d(P,B)$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}$$

$$x^2-4x+4+y^2-10y+25=x^2-8x+16+y^2+14y+49$$

$$x-6y-9=0$$



Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas que forman el ángulo.

Ecuaciones de las bisectrices

$$d(P, r) = d(P, s)$$

Siendo

$$r \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$s \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$P(x, y)$$

$$\frac{|A_1 x + B_1 y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2 x + B_2 y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas r ≡ 3x - 4y + 5 = 0 y s ≡ 6x + 8y + 1 = 0.

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6x + 8y + 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$10(3x - 4y + 5) = 5(6x + 8y + 1)$$

$$2(3x - 4y + 5) = 6x + 8y + 1$$

$$6x - 8y + 10 = 6x + 8y + 1$$

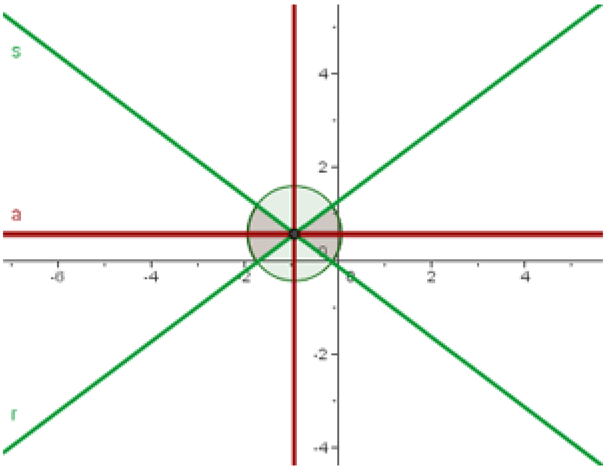
$$-16y + 9 = 0$$

$$10(3x-4y+5)=-5(6x+8y+1)$$

$$2(3x-4y+5)=-6x-8y-1$$

$$6x-8y+10=-6x-8y-1$$

$$12x+11=0$$



Ejercicios de rectas

1. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(-2,5). Haz lo mismo para la recta que pasa por (1,2) y (2,3) y para la recta que pasa por (1,1) y (3,2).
2. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta 3x + 2y - 7 = 0.
3. Estudiar la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

   a) 2x + 3y - 4 =0 y 2x - 2y + 1= 0
   b) 2x + 3y - 4 =0 y 3x - 2y -9 = 0

4. Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es paralela a la recta

   s ≡ 2x + y + 2 = 0.

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (-2, 2).
6. La recta r ≡ 3x + ny - 7 = 0 pasa por el punto A(3,2) y es paralela a la recta que tiene como ecuación s ≡ mx + 2y -13 = 0. Calcula m y n.
7. Calcular la ecuación de la recta perpendicular a r ≡ 8x - y - 1 = 0 y pasa por el punto P(-3, 2).
8. Una recta de ecuación r ≡ x + 2y - 9 = 0 es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas (2,1). Hallar las coordenadas del otro extremo.
9. Hallar el ángulo que forman las rectas que tienen por ecuaciones:

a) $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$ $\qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = -4 - 3k \\ y = 5 + k \end{cases}$

b) $s_1 \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{2}$ $\qquad s_2 \equiv \dfrac{x+4}{\sqrt{3}} = \dfrac{y-1}{-1}$

c) $r_1 \equiv 3x + 4y - 12 = 0$ $\qquad r_2 \equiv 6x + 8y + 1 = 0$

d) $s_1 \equiv 2x + 3y - 5 = 0$ $\qquad s_2 \equiv 3x - 2y + 10 = 0$

10. Una recta es paralela a la que tiene por ecuación r ≡ 5x + 8y - 12 = 0, y dista 6 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación?

11. Calcular las bisectrices de los ángulos determinados por la rectas:

$$r \equiv 24x - 7y - 2 = 0; \qquad s \equiv 3x + 4y - 4 = 0$$

12. Dadas las rectas r ≡ 3x + y - 1 = 0 y s ≡ 2 x + m y -8 = 0, determinar m para que formen un ángulo de 45°.

13 Una recta es perpendicular a la que tiene por ecuación $r \equiv 5x - 7y + 12 = 0$ y dista 4 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación?

<u>Ejercicios de las pruebas de acceso</u>

14. Halla la ecuación de la recta que pasa por punto P(1,1) y es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,-4).

15. Determina el lugar geométrico de puntos tales que la diferencia en valor absoluto de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(1,2) y B(5,0) sea 12.

16. Dados los puntos A(-1,1) y B(1,5):

    a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos.
    b) Determina la ecuación de una recta paralela a la anterior que pasa por el punto C(1,-1)
    c) Determina si el punto D(2,1) pertenece a alguna de las rectas anteriores.

17. Dados los puntos A(2,-1) y B(1,2):

    a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos.
    b) Pendiente de dicha recta
    c) Puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas

18. Una partícula se desplaza sobre un plano describiendo una trayectoria r en línea recta que pasa por los puntos (-5,0) y (0,2) de un sistema de ejes cartesianos definido en el plano. Otra partícula se desplaza por el mismo plano a lo largo de la recta s de ecuación $-7x + 3y -6 =0$.
    a) Determine la ecuación cartesiana de la recta r
    b) Halle el punto de corte de ambas trayectorias

19. Dada la recta r de pendiente 4 y que pasa por el punto (4,3), calcula:
    a) Las ecuaciones de la recta
    b) Una recta paralela que pase por el punto (6,3)
    c) Una recta perpendicular que pase por el punto (6,3)
    d) El punto de corte de la recta perpendicular con la recta r