Bloque 1. Aritmética y Álgebra

8. Proporcionalidad numérica

1 . Proporcionalidad simple directa

Una **magnitud** es toda cualidad de un ser que pueda medirse. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la temperatura, el precio, el peso, … Muchas veces dos de estas magnitudes pueden estar relacionadas, como vemos en la siguiente tabla de ejemplo:

m^2 de valla a pintar	6	9	12	18
litros de pintura empleados	2	3	4	6

En este caso existe una relación entre dos magnitudes: superficie y litros. Además, cuando una varía provoca que varíe la otra. Observamos cómo al doble de m^2 de valla corresponde doble cantidad de litros de pintura, al triple de m^2 de valla corresponde triple cantidad de litros de pintura. Cuando se cumple esta relación, se dice que estas magnitudes son directamente proporcionales.

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando un aumento o disminución de una de ellas determina un aumento proporcional de la otra o cuando una disminución de una de ellas determina una disminución proporcional de la otra.

1.1. Regla de tres simple directa

Los problemas en los que se conocen tres cantidades de dos magnitudes, directamente proporcionales se llaman problemas de regla de tres simple directa. Es similar a calcular la cuarta proporcional.

Ejemplo 1: En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Solución: Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

Litros de agua	50	x
Gramos de sal	1.300	5.200

Se verifica la proporción: $\frac{50}{1300} = \frac{x}{5200}$

Y como en toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos (en palabras simples, se multiplican los números en forma cruzada) resulta:

50 . 5200 = 1300 . x

Es decir $x = \frac{50.5200}{1300} = 200$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

litros de agua		gramos de sal	
Si en 50 l	hay	1300 gr dde sal	$x = \frac{50.5200}{1300} = 200$
en **x** l	habrá	5200 gr	

¡Ojo! Hay que poner atención en poner las magnitudes iguales en la misma columna.

Un problema que también se puede resolver mediante la regla de tres es el de la **escala** en los planos y mapas.

Ejemplo 1: En un mapa de escala 1:200.000 la distancia entre dos puntos es de 15 cm. ¿Cuál es la distancia en la realidad?

Solución: 1º) Primero hay que establecer la equivalencia de la escala:

1 cm en el mapa equivalen a 200.000 cm en la realidad; es decir a 2 km.

2º) Y ahora planteamos la regla de tres:

medida en el mapa		medida en la realidad	
Si 1 cm	equivale	2 km	$x = \frac{15.2}{1} = 30km$
15 cm	equivaldrán	x km	

1.2. Repartos directamente proporcionales

Consiste en repartir una cantidad entre varias partes de forma que lo que reciba cada una de las partes sea directamente proporcional a la cantidad aportada por cada una.

Ejemplo: Compramos un lote de libros por 162 euros. Víctor se quedó con 7 libros, Belén con 5 y Jaime con 6. ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Calculamos lo que vale un libro y luego multiplicamos por cada uno de los lotes:

Número total de libros: $7+5+6=18$ libros

Valor de un libro: $162:18=9$ euros

Cantidad a pagar por cada uno:

Víctor: $7.9=63$ euros

Belén: $5.9=45$

Jaime: $6.9=54$

2. Porcentaje o tanto por ciento

En la vida diaria oímos continuamente porcentajes. Habrás oído que tal banco ha tenido un beneficio del 14 por ciento de beneficios. Esto quiere decir que por cada 100 monedas, ha obtenido un beneficio de 14, y ahora tiene 114. También habrás oído o leído que los precios han subido el último mes el 1,3 por ciento; que el precio de la cebada o de la uva ha bajado un 2,3 por ciento… Porcentaje o tanto por ciento quiere decir lo mismo. Se representa con el símbolo **%**.

Un porcentaje es un tipo de regla de tres directa en el que una de las cantidades es 100.

Para **calcular el tanto por ciento** de una cantidad, se multiplica dicha cantidad por el tanto por ciento y se divide por 100.

Ejemplo 1: El 60% de los empleados de una empresa llegan al trabajo en autobús. Si el número total de empleados es 1.200, ¿cuántos llegan en autobús?

Solución: Planteamiento de la regla de tres:

Porcentaje		Empleados	
Si el 100%	son	1200	$x = \frac{1200.60}{100} = 720$
el 60%	serán	x	

Ejemplo 2: En una votación participan 300 personas. ¿Qué tanto por ciento de los votos obtuvo un candidato que fue votado por 60 personas?

Solución: Planteamiento de la regla de tres:

Porcentaje		Personas	
Si el 100%	son	300	$x = \frac{60.100}{300} = 20\%$
x %	serán	60	

Ejemplo 3: El 40% de una cantidad es 1.200. ¿Cuál es la cantidad total?

Solución: Planteamiento de la regla de tres:

Porcentaje		Cantidad	
Si el 40%	son	1200	$x = \frac{1200.100}{40} = 3000$
el 100%	serán	x	

3. Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, disminuye la otra en la misma proporción. Y viceversa, cuando al disminuir una, aumenta la otra en la misma proporción. Veamos a continuación algunos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales:

- ***Un vehículo en circulación***: cuando mayor sea su velocidad, manos tiempo tardará en recorrer un trayecto, y al revés, a manor velocidad mayor será el tiempo.
- ***Una cuadrilla de pintores y el tiempo que tardan en pintar una pared***: cuantos más pintores sean, menos tiempo tardarán en pintarla.

3.1. Regla de tres simple inversa

Consiste en que, dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes inversamente proporcionales, calcular la cantidad de una de estas magnitudes.

Ejemplo 1: Un grifo que mana 18 l de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 l por minuto?

Solución: Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que **a menos** litros por minuto tardará **más** en llenar el depósito

Litros		Tiempo
Si con 18 l	tarda	14 h
con 7 l	tardará	x

$$x = \frac{18.14}{7} = 36$$

Fíjate que en este caso hemos multiplicado en línea y no en cruz como en la regla de tres simple directa.

Ejemplo 2: Si 4 obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

Solución: Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que **a mas** obreros tardarán **menos** horas.

Obreros		Tiempo
Si 4 obreros	tardan	12 h
6 obreros	tardarán	x

$$x = \frac{4.12}{6} = 8$$

4. Proporcionalidad compuesta

La **regla de tres compuesta** se emplea cuando se relacionan **tres o más magnitudes**, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas obtenemos la desconocida.

Una **regla de tres compuesta** se compone de varias **reglas de tres simples** aplicadas sucesivamente.

Como entre las magnitudes se pueden establecer relaciones de **proporcionalidad directa o inversa**, podemos distinguir **tres casos** de **regla de tres compuesta**:

- **Regla de tres compuesta directa**
- **Regla de tres compuesta inversa**
- **Regla de tres compuesta mixta**

a) <u>**Regla de tres compuesta directa**</u>

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{A_1 \longrightarrow \overbrace{B_1 \longrightarrow \overbrace{C_1 \longrightarrow D}^{D}}^{D}}^{D} \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}$$

Ejemplo

Nueve grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

A **más** grifos, **más** euros $\longrightarrow$ **Directa**.

A **más** horas, **más** euros $\longrightarrow$ **Directa**.

9 grifos $\longrightarrow$ 10 horas $\longrightarrow$ 20 €

15 grifos $\longrightarrow$ 12 horas $\longrightarrow$ x €

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{10}{12} = \frac{20}{x} \qquad\qquad \frac{90}{180} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \cdot 180}{90} = 40 €$$

b) <u>Regla de tres compuesta inversa</u>

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot D}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2}$$

Ejemplo

5 obreros trabajando, trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?

A **menos** obreros, **más** días $\longrightarrow$ **Inversa**.

A **más** horas, **menos** días $\longrightarrow$ **Inversa**.

5 obreros $\longrightarrow$ 6 horas $\longrightarrow$ 2 días

4 obreros $\longrightarrow$ 7 horas $\longrightarrow$ x días

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{x} \qquad \frac{28}{30} = \frac{2}{x} \qquad x = 2.14 \text{ días}$$

c) Regla de tres compuesta mixta

D

I

D

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{B_2}{B_1}\cdot\frac{C_1}{C_2}=\frac{D}{x}$$

$$x=\frac{A_2\cdot B_1\cdot C_2\cdot D}{A_1\cdot B_2\cdot C_1}$$

Ejemplo

Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día un muro de 30 m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50 m de muro que faltan?

A **más** obreros, **menos** días $\longrightarrow$ **Inversa**.

A **más** horas, **menos** días $\longrightarrow$ **Inversa**.

A **más** metros, **más** días $\longrightarrow$ **Directa**.

8 obreros $\longrightarrow$ 9 días $\longrightarrow$ 6 horas $\longrightarrow$ 30 m

10 obreros $\longrightarrow$ x días $\longrightarrow$ 8 horas $\longrightarrow$ 50 m

$$\frac{10}{8}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{30}{50}=\frac{9}{x} \qquad 1=\frac{9}{x} \qquad x=9$$

Ejercicios.

1. De las siguientes tablas, determina cuál o cuáles representan algún tipo de proporcionalidad (directa o inversa):

y	5	10	15	20	25
x	1	2	3	4	5

y	1	4	5	10	20
x	20	5	4	2	1

y	2	3	4	3	2
x	1	2	3	4	5

y	18	15	13	10	9
x	20	15	14	2	1

2. Resuelve los siguientes problemas

a) Un motor extrae de una piscina 378 litros de agua en 9 minutos. ¿Cuánto tardará en extraer 2100 litros?
b) Si en 17 cajas iguales hay 1.632 botones. ¿Habrá 3.552 botones en 37 cajas?
c) Hemos hecho un pedido de 32 kg de azúcar por un importe total de 28,8 euros. Pero, por error, nos han servido 6,5 kg menos. ¿Cuál será el importe de la factura correcta?
d) En un mapa de escala 1:1.000.000, una distancia real de 300 km,¿tendrá en el mapa una medida de 40 cm?
e) La distancia entre dos puntos es de 1500 m. Su distancia en un mapa de escala 1:25.000, ¿podrá ser de 8 cm?
f) Un padre quiere repartir 3000 euros entre sus tres hijos en partes proporcionales a sus edades, que son 12, 16 y 22 años. ¿Cuánto tiene que repartir a cada uno?
g) Tres albañiles de igual categoría han cobrado por hacer una reforma 24000 euros. Un albañil trabajó 16 días, otro 11 y el tercero, 13 días. Hacen el reparto de la siguiente forma: el que trabajó 16 días recibe 9500 euros; el que trabajó 11 días, 6600 euros, y el que trabajó 13 días, 7800 euros. ¿Está bien hecho el reparto?

3. Escribe V o F a continuación de cada apartado para decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, indica la solución.

a) Vamos a realizar una compra cuyo importe es de 580 euros. Nos hacen un descuento del 15%. El comerciante nos dice que le debemos abonar 500 euros.	

b) Un representante cobra el 5% de las ventas que realiza. El último mes ha recibido 900 euros. ¿Será cierto que ha vendido género por un total de 15000 euros?	
c) Por una estantería cuyo precio de venta al público es 56 euros, se han pagado 47,6 euros. En la tienda nos dicen que nos han aplicado un 18% de descuento. ¿Es verdad?	

4. Resuelve los siguientes problemas:

a) Un librero ha ganado 1968 € vendiendo 82 ejemplares de una obra, la mitad al precio marcado por catálogo y la otra mitad con una rebaja del 10%. El editor le da una comisión por libro del 25% sobre el precio del catálogo. Por tanto, el precio marcado en el catálogo es de 120€.	
b) En el campeonato escolar el equipo de 3º de ESO del colegio jugó 50 partidos de los que ganó 20, perdió el 40% y empató los restantes. ¿Ganó o perdió la mayoría de los partidos?	

5. Escribe V o F a continuación de cada apartado para decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En caso de ser falsa, indica la solución.

a) Un agricultor tiene 100 animales y forraje para poderlos alimentar durante 90 días. Vende un cierto número de animales y de este modo el forraje puede durarle 30 días más. Para que esto sea posible, dice que vendió 60 animales. ¿Es cierto?	
b) Un grifo arroja 400 litros por minuto y tarda en llenar una piscina 100 minutos. Si el grifo arrojara 500 litros por minuto, ¿tardaría en llenar la piscina 90 minutos?	

6. **Quince obreros tardan 28 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán 7 obreros en realizar el mismo trabajo?.**

7. **La audiencia de un programa deportivo, que era de 160.000 personas, ha bajado durante el último mes un 12 %. ¿Cuántos espectadores han visto el programa este mes?**

8. **El coste de un producto con el I.V.A incluido del 21% es de 460 €. ¿Cuál es el precio del producto sin I.V.A?.**

9. **Tres personas han construido una valla en 12 días, trabajando 8 horas diarias. Pero falta una de ellas y las otras dos hacen otra valla igual en 16 días. ¿ Cuántas horas han trabajado al día ?.**

10. **Reparte 338 €, en partes proporcionales a los números 20 y 32.**

11. **Un poste mide 20 metros de altura. Ayer pinté las 3/5 partes. Cuando me disponía hoy a continuar el trabajo observé que se habían estropeado 2 metros. Por tanto me quedan por pintar 10 metros. Esto es verdadero o falso.**

12. **¿Qué ganancias producirán en un año y medio, 6.000 € invertidos al 2,5% de interés?**

13. **Un taller de confección ha fabricado 1600 abrigos, trabajando 8 horas diarias durante 10 días. ¿Cuánto tiempo tardará en servir un pedido de 2000 abrigos trabajando 10 horas al día?** *[Solución: 10]*

14. **Tres cosechadoras en tres horas han segado un campo de 27 hectáreas. ¿Cuántas cosechadoras serán necesarias para segar en dos horas 36 hectáreas?** *[Solución: 6]*

15. **Un taller, trabajando 8 horas diarias, ha necesitado 5 días para fabricar 1000 piezas. ¿Cuántos días tardará en hacer 3000 piezas trabajando 10 horas diarías?** *[Solución: 12]*

Ejercicios de proporcionalidad en las pruebas de acceso

16. **Tres socios invierten juntos en bolsa las cantidades de 10000€, 12000€ y 14000€ respectivamente para repartirse los beneficios de forma directamente proporcional a las cantidades invertidas. Establezca las cantidades correspondientes a cada uno si al cabo de 6 meses han obtenido un beneficio de 12600€.** *[Solución: 3500, 4200 y 4900]*

17. **En una vaquería, un rebaño de 20 vacas se come, en 15 días 2400Kg de pienso. Determinar:**

    a) Cuántos días durarán 4200 kg a 75 vacas
    b) Cuantas vacas se comerán los 4200 kg de pienso en 21 días.
    c) Cuantos kilos de pienso se comerán 43 vacas en 25 días.

    [Soluciones: 7,25 y 8600]

18. **En un hospital se dispone de un cuerpo de 75 médicos que trabajan 4 días a la semana en turnos de 12 horas. Se pretende llegar a un acuerdo para que trabajen 5 días a la semana en turnos de 10 horas diarias. ¿Cuántos médicos harán falta para dar el mismo servicio?** *[Solución: 72]*

19. **En la construcción de un puente trabajaron 1.000 personas en turnos de 8 horas durante 300 días.**

    a) ¿Cuánto habrían tardado si los turnos fuesen de 10 horas?

    b) ¿Y si hubieran trabajado 600 personas en turnos de 8 horas?

    c) ¿Y si fuesen 1.500 personas trabajando 5 horas diarias?

    [Soluciones: 800, 400 y 281,25]

20. **Una empresa reparte una gratificación de 34200 € entre tres de sus trabajadores de forma directamente proporcional a los años que tienen de antigüedad en la empresa, que son 12, 15 y 18 años respectivamente. Halla cuánto dinero le corresponderá a cada trabajador.** *[Solución: 9120, 11400 y 13680]*