

Parte nº8. Tema III-4.

La función lineal y cuadrática como modelización de situaciones reales.

ÍNDICE

- 1) Funciones: primeras ideas.
 - 2) Funciones lineal y afín
 - 2.1. Función lineal.
 - 2.2. Función afín.
 - 2.3. Funciones constantes.
 - 2.4. Líneas verticales.
 - 2.5. Los ejes.
 - 3) Función cuadrática.
 - 4) Uso de funciones lineales y cuadráticas para modelar situaciones.
 - 4.1. Modelos usando funciones lineales.
 - 4.2. Modelos usando funciones cuadráticas.
-

1) Funciones: primeras ideas

Una función es como una máquina, en la que introducimos un valor y nos devuelve otro, que depende de una determinada regla matemática que permite su cálculo



Podemos definir una función usando lenguaje natural, por ejemplo:

“Toma un número natural y multiplícalo por dos”

Así, en este caso obtenemos la siguiente tabla asociada a esta función

Funcion: $x \rightarrow 2x$ ($f(x)=2x$)	
Origen: Número natural	Final: el doble
1	2
2	4
3	6

...	...
-----	-----

Otra manera para escribir la entrada y la salida de una función como un "par ordenado", como (7,14), donde la entrada siempre va primero y la salida después:

(entrada, salida)

Una definición formal de función sería:

“Una función es una relación entre dos magnitudes llamadas x e y en la que para cada valor de x existe un y sólo un valor de y posible”.

x es la variable independiente.

y es la variable dependiente porque su valor depende del valor de x

En ocasiones, los datos que podemos encontrar en la vida real se pueden escribir en forma de tabla, relacionando dos valores, a modo de función, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

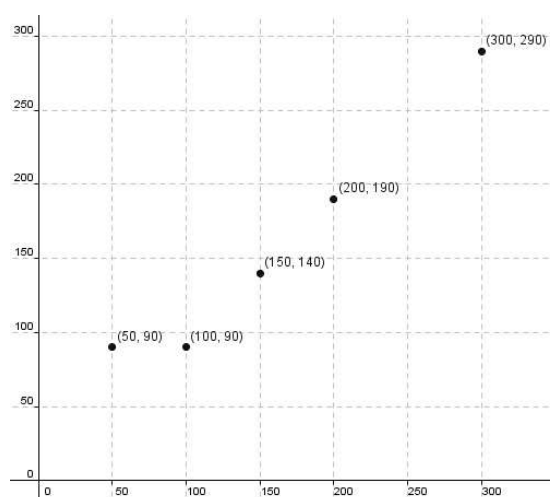
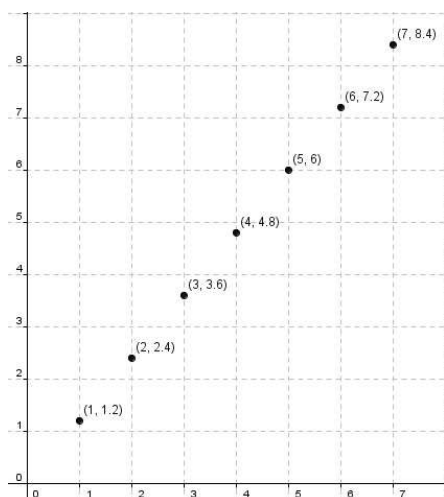
Ejemplo 1: en una frutería, un kilo de plátanos cuesta 1,20€, podemos construir una tabla para mostrar cuánto dinero gastaríamos en comprar otras cantidades de plátanos:

Kilos	1	2	3	4	5	6	7
Precio	1.20	2.40	3.60	4.80	6	7.20	8.40

Ejemplo 2: el precio del alquiler de un coche es de 90€, más 1€ por cada kilómetro recorrido durante los primeros cien kilómetros. En la siguiente tabla se muestra el precio en función del número de kilómetros recorridos:

Kilómetros	50	100	150	200	300
Precio	90	90	140	190	290

Utilizando estas tablas podemos representar los datos gráficamente, para ello, en primer lugar, necesitamos ordenar los datos, luego podemos tomar los pares y representarlos usando coordenadas, como podemos ver en los siguientes ejemplos.



En el caso de querer representar gráficamente una función, podemos comenzar construyendo una tabla, representar los puntos obtenidos en ella y después intentando unir esos puntos con una línea que contenga a todos los puntos de coordenadas $(x, f(x))$, esto, por lo general, no es sencillo, puesto que depende de la dificultad de la fórmula que define a la función. En este texto estudiaremos la representación gráfica de dos tipos de funciones: la función lineal/afín y la función cuadrática.

Ejercicio 1

Durante un partido de baloncesto hemos tomado notas sobre los resultados, son los siguientes:

Tiempo (en minutos)	Equipo local	Equipo visitante
5	10	8
10	16	15
15	20	25
20	34	38
25	40	46
30	48	52
35	65	64
40	81	76

a) Elaborar una tabla que contenga la diferencia entre los marcadores del equipo local y el visitante.

b) Dibujar una gráfica con los datos del equipo local, una gráfica con los datos del equipo visitante y una gráfica que represente la diferencia.

Ejercicio 2

Esta es la lista de precios de un aparcamiento que está abierto de 9 h a 22 h.

- Primera y segunda hora Gratis

- Tercera hora y consecutivas o fracción 1€ cada una
- Máximo diario 12€

Dibuja la gráfica de la función que relaciona el tiempo de estacionamiento con su precio.

2) Funciones representadas con una líneas recta

2.1 Función Lineal.

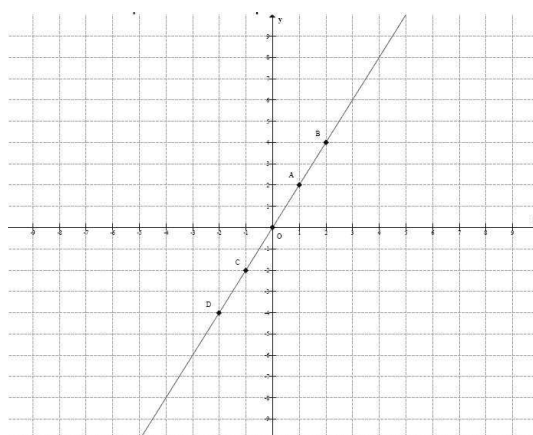
Su expresión es $y = mx$.

Comenzamos con un ejemplo, dibujaremos la gráfica de $y = 2x$.

- Primero hacemos una tabla con algunos puntos de $y = 2x$

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	0	2	4	-2	-4

- A continuación representamos los puntos y los unimos con una línea.

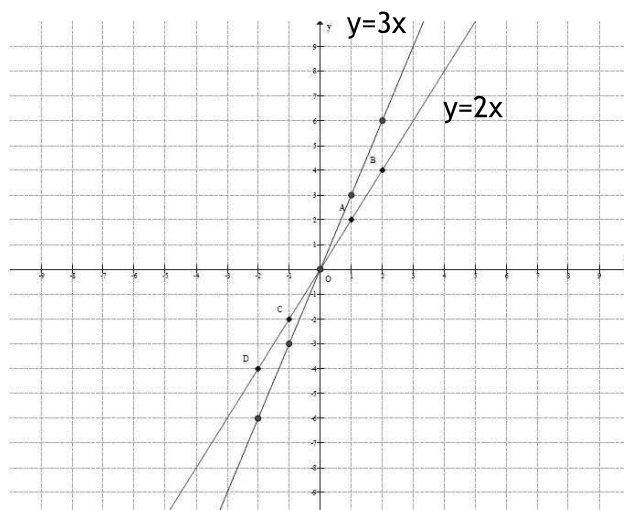


Ahora vamos a representar, en la misma cuadrícula la gráfica de $y = 3x$.

- Hacemos una tabla con algunos puntos de $y = 3x$

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	0	3	6	-3	-6

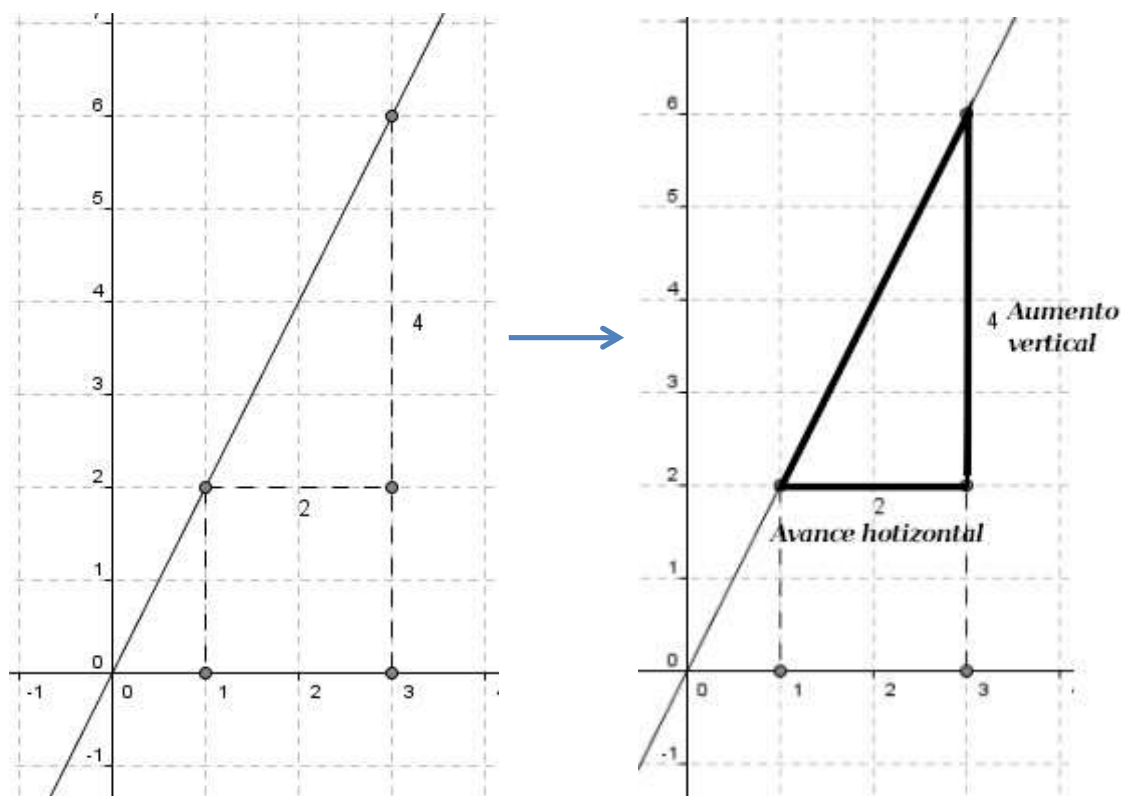
- Ahora, representamos los puntos de esta tabla y los unimos con una línea.



Como podemos ver, la línea $y = 3x$ es más inclinada que $y = 2x$, el coeficiente x es la pendiente e indica la inclinación de la línea.

¿Cómo podemos obtener la pendiente de una función conociendo su gráfica?

Dada la gráfica de una función lineal, podemos seleccionar un triángulo, como vemos en la imagen:

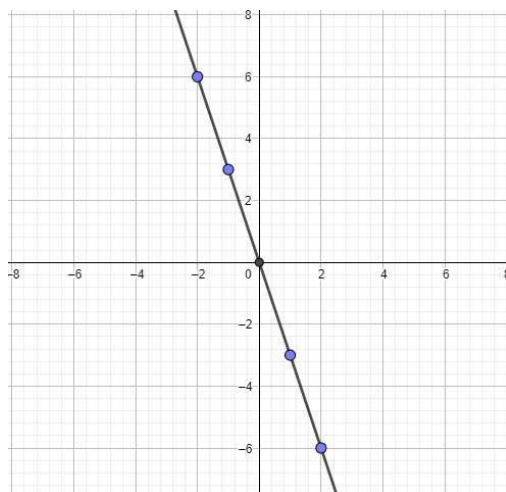


$$\text{pendiente} = \frac{\text{aumento vertical}}{\text{avance horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$$

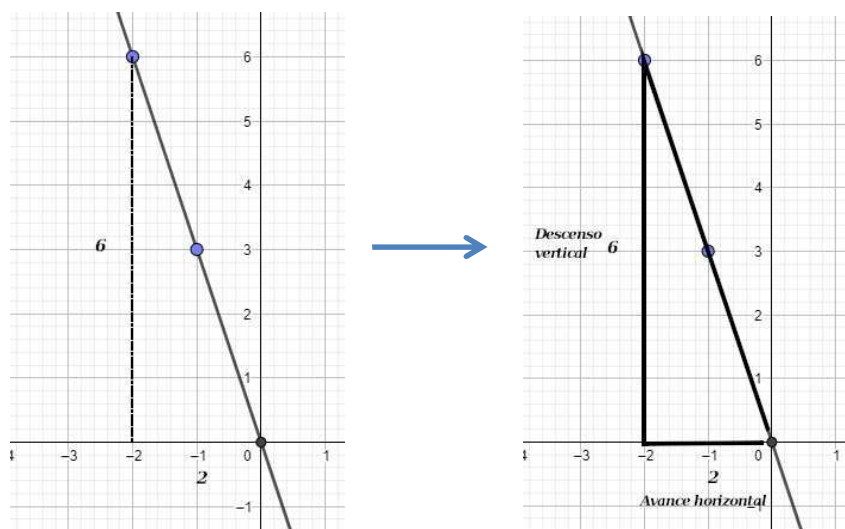
Ejemplo; si representamos la línea $y=-3x$ tendremos:
Tabla de valores:

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	0	-3	-6	3	6

Representación gráfica:



Podemos seleccionar un triángulo cualquiera, como el que vemos en la imagen:



En este caso será:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{aumento vertical}}{\text{avance horizontal}} = \frac{-6}{2} = -3$$

Como conclusión podemos decir que, dada una función lineal, $y=m \cdot x$:

- Si $m > 0$, entonces obtenemos funciones crecientes.
- Si $m < 0$, obtenemos funciones decrecientes.

2.2 Función Afín.

Su expresión es $y = mx + n$.

El proceso para representar este tipo de funciones es el mismo que el segundo en el apartado anterior, por ejemplo, para representar la función $y = 2x + 1$, podemos obtener algunos valores:

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	1	3	5	-1	-3

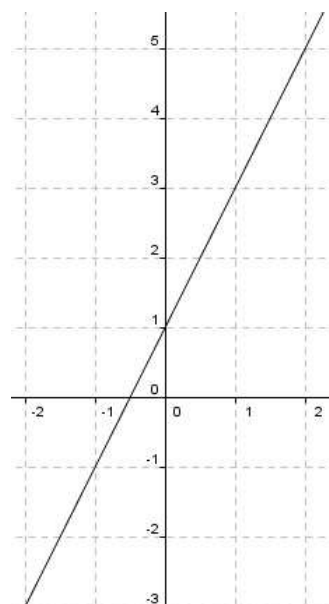
Y la función es como podemos ver en la figura, sus características son:

- En este caso la recta no contiene el punto (0,0). Como podemos ver, el punto de corte con el eje OY es (0,1)
- También podemos obtener la pendiente, en este caso es 2.

En general, para una función $y = mx + n$ podemos decir que:

- Se corta el eje y en el punto (0,n), se dice que el punto de corte con el eje OY es n.
- La pendiente es m

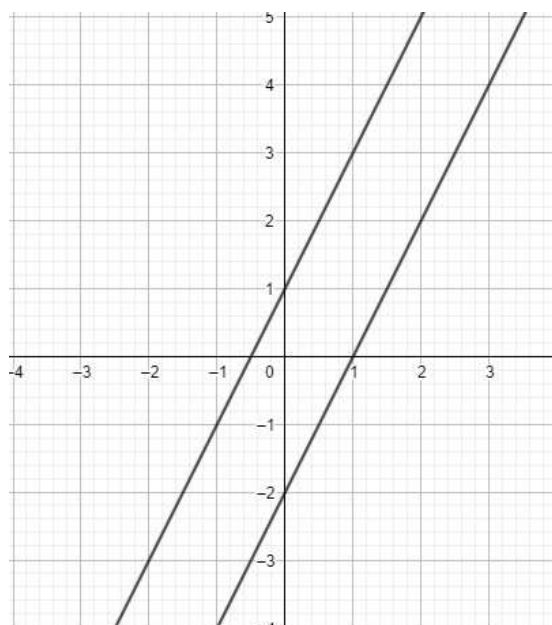
Además, como ocurría en el caso de las funciones lineales, podemos decir que, si $m > 0$, entonces obtenemos funciones crecientes y si $m < 0$, obtenemos funciones decrecientes.



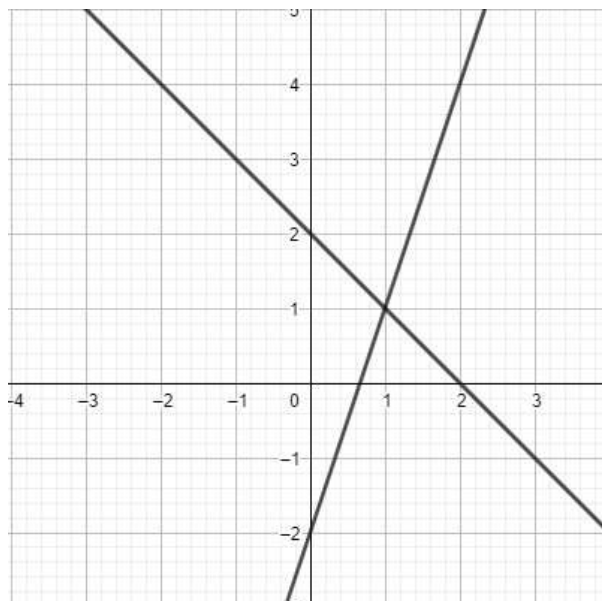
El significado de la pendiente.

Usando el gradiente podemos comprobar si dos rectas son paralelas o si se cortan en un punto, por ejemplo:

- Si representamos las funciones $y = 2x + 1$ e $y = 2x - 2$ obtenemos dos rectas paralelas, es decir, con la misma pendiente.



- Si representamos las funciones $y = 3x - 2$ e $y = -x + 1$ obtenemos dos rectas con distinta pendiente, y que, por lo tanto, se cortan en un punto.



Calculo de los puntos de corte con los ejes.

En el caso de una función afín de ecuación $y = mx + n$, el cálculo de los puntos de corte con los ejes se realiza de la siguiente manera:

- Con el eje OX: en este caso el punto es de la forma $(x, 0)$, por lo que hay que hallar el valor de x que verifica $y = 0$, es decir, $m \cdot x + n = 0$

$$m \cdot x + n = 0 \rightarrow m \cdot x = -n \rightarrow x = \frac{-n}{m}$$

Luego, el punto de corte es $\left(\frac{-n}{m}, 0\right)$

Ejemplo: calculo del punto de corte de la recta $y = 2x - 3$ con el eje OX.

$$2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

El punto de corte es: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

- Con el eje OY: ahora, el punto será de la forma $(0, f(0))$.

$$f(0) = m \cdot 0 + n = n$$

Luego, el punto de corte es $(0, n)$

Ejemplo: calculo del punto de corte de la recta $y = -x - 5$ con el eje OY.

$$f(0) = -0 - 5 = -5$$

El punto de corte es: $(0, -5)$.

Calculo del punto de corte de dos rectas no perpendiculares.

Dada dos funciones lineales o afines, con distinta pendiente, $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ (con $m \neq m'$) el cálculo del punto de corte se realiza resolviendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en este caso usaremos el método de igualación:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases} \rightarrow mx + n = m'x + n' \rightarrow mx - m'x = n' - n \rightarrow$$

$$\rightarrow (m - m') \cdot x = n' - n \rightarrow x = \frac{n' - n}{m - m'}$$

Para calcular y sustituimos el valor de x obtenido en cualquiera de las funciones, por ejemplo:

$$y = m \cdot \left(\frac{n' - n}{m - m'} \right) + n$$

Ejemplo: calculo del punto de corte de las rectas $y=-3x+1$ e $y=4x-5$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \rightarrow -3x + 1 = 4x - 5 \rightarrow -3x - 4x = -5 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow -7x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

Calculamos y:

$$y = -3 \cdot \frac{6}{7} + 1 = \frac{-18}{7} + 1 = \frac{-18+7}{7} = \frac{-11}{7}$$

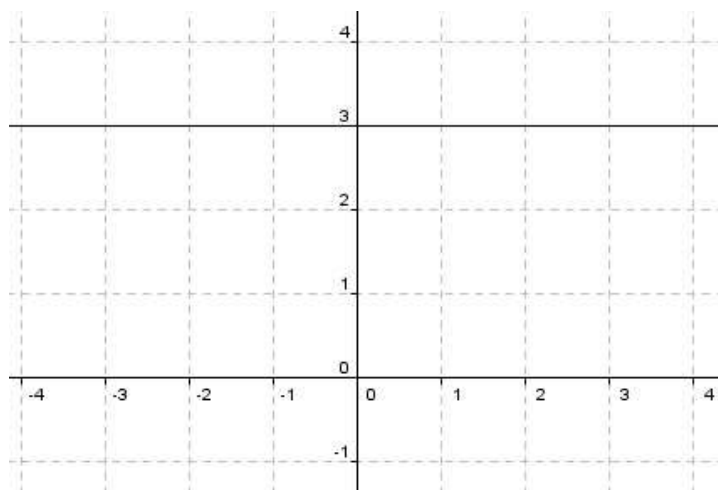
El punto de corte es: $\left(\frac{6}{7}, \frac{-11}{7} \right)$.

2.3 Funciones constantes.

Podemos encontrar funciones que toman el mismo valor para todos los puntos, por ejemplo $y=3$. En este caso la tabla sería:

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	3	3	3	3	3

Como vemos en la tabla, ahora el valor de y no depende del valor de x, y podemos representar la función de esta manera:



En general podemos encontrar funciones constantes con la fórmula: $y=n$, cuya representación es una recta que pasa por el punto $(0,n)$, siendo n el punto de corte con el eje OY.

La pendiente es cero, porque no hay inclinación, es decir $m=0$.

2.4 Líneas verticales.

La gráfica de $x=4$ es una recta vertical, porque todos los puntos de la recta tienen la coordenada $x=4$.

Por lo tanto, tenemos $(0,4)$, $(1,4)$, $(2,4)$ y así sucesivamente. La gráfica asociada no es una función porque un valor de x tiene más de un valor de y .

En general decimos que $x=k$ es una recta vertical que pasa por el punto $(k,0)$

2.5 Los ejes.

Los ejes contiene puntos de la forma:

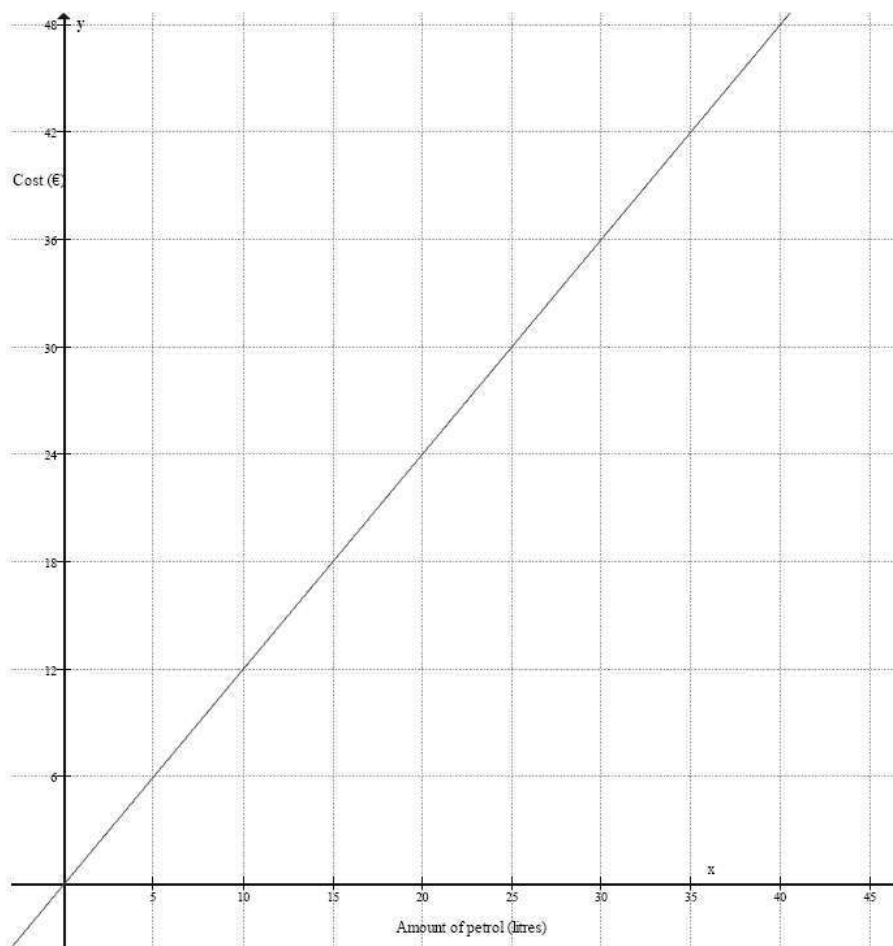
- El eje OX: $(k,0)$. Por ejemplo, los puntos $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,0)$, son puntos de este eje, y como vemos, la segunda coordenada siempre es cero, luego la ecuación del eje OX es $y=0$.
- El eje OY: $(0,n)$. Por ejemplo, los puntos $(0,-2)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,1)$ y $(0,2)$, son puntos de este eje, y como vemos, la primera coordenada siempre es cero, luego la ecuación del eje OY es $x=0$.

Ejemplo

Cuando un coche se llena de gasolina, tanto la cantidad como el coste de la gasolina se muestran en el surtidor. Un litro de gasolina cuesta 1,20 €. Así, 2 litros cuestan 2,40 € y 5 litros cuestan 6 €. La siguiente tabla contiene algunos de estos valores:

Gasolina en litros	5	10	15	20	25	30
Precio en euros	6	12	18	24	30	36

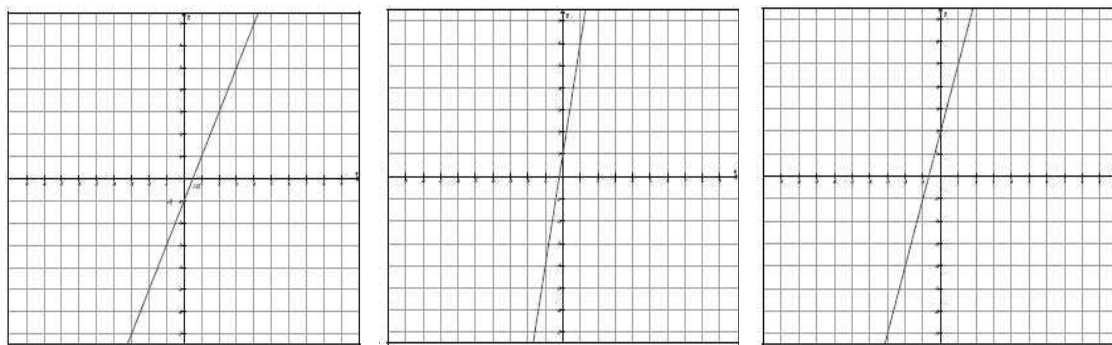
La información se puede representar gráficamente, como se muestra a continuación.



Observa que por cada 5 litros que aparecen en la gráfica, la gráfica sube 6€, por lo tanto la pendiente será $m = \frac{6}{5}$, y el punto de corte con el eje OY es (0,0), por lo que $n=0$. En consecuencia, la función es lineal y su expresión es: $y = \frac{6}{5} \cdot x$

Ejercicio 3

Asigna a cada ecuación la representación gráfica que le corresponde y explica cómo hiciste tu elección.



$$y = 3x + 2$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = 5x + 1$$

Ejercicio 4

Responda "verdadero" o "falso" en cada caso:

- a) $y = 5x$ es más pronunciado que $y = 3x$
- b) $y = 2x$ es paralelo a $y = 2x + 4$
- c) $y = 4x$ es más pronunciado que $y = x - 5$
- d) $y = 2x$ es paralela a $y = x + 2$.

Ejercicio 5

Dibuja la gráfica de $y=3x-2$ para valores de x de -1 a 2 . ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica cruza el eje y ?

Ejercicio 6

Dibuja la gráfica de $y=5-2x$ para valores de -2 a 3 . Usa tu gráfica para encontrar:

- a) el valor de y cuando $x=0$
- b) el valor de x cuando $y=0$
- c) el valor de x cuando $y=8$

Ejercicio 7

Escribe la pendiente y la intersección con el eje y para cada una de las siguientes gráficas.

$$a) y=3x+5$$

$$b) y=4x-1$$

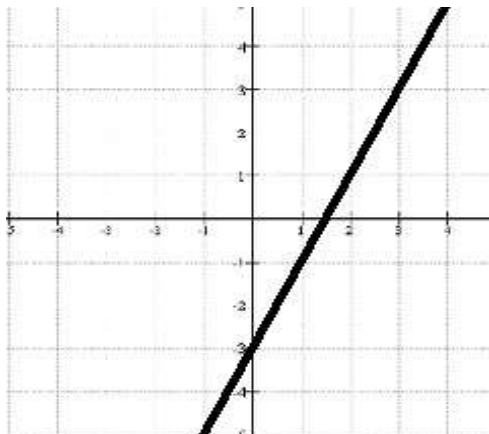
$$c) y=6-x$$

Ejercicio 8

Escribe la ecuación de la recta que tiene pendiente -7 y corta al eje y en el punto $(0,4)$

Ejercicio 9

Encuentra la ecuación de la recta que se muestra en esta gráfica.



3) Funcion cuadrática

Una función cuadrática es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por la expresión:

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

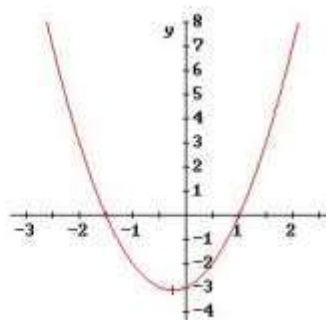
La gráfica de este tipo de funciones se llama parábola

- Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo ($a > 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo, se dice entonces que es una gráfica convexa.

Por ejemplo:

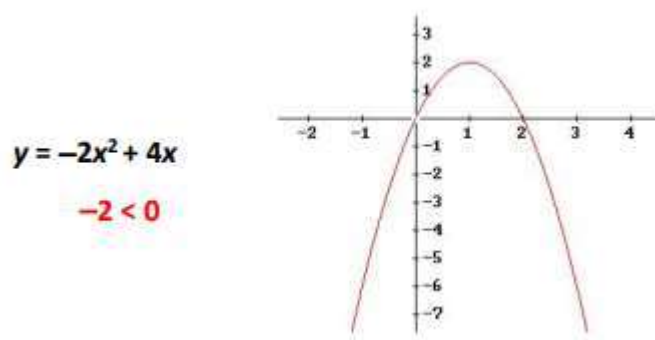
$$y = 2x^2 + x - 3$$

$2 > 0$



- Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo ($a < 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo, en este caso se dice que es una gráfica cóncava.

Por ejemplo:



Los coeficientes b y c afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

Calculo de los puntos de corte con los ejes.

En el caso de una función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, el cálculo de los puntos de corte con los ejes se realiza de la siguiente manera:

- Con el eje OX: en este caso el punto es de la forma $(x, 0)$, por lo que hay que hallar el valor de x que verifica $y=0$, es decir, resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado se obtienen aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hay que tener cuidado con los signos, ya que "-b" quiere decir que hay que cambiarle el signo a "b".

También es conveniente tener en cuenta que, esta fórmula puede dar como resultado dos valores, un valor o ninguno, dependiendo de:

- ◆ Si $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ Dos soluciones

En este caso habrá dos puntos de corte: $\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ y $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$

- ◆ Si $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ Una solución

En este caso habrá un solo punto de corte: $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$

- ◆ Si $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ Sin solución

En este caso no hay puntos de corte con el eje OX

Ejemplo: calculo de los puntos de corte de la función cuadrática $y = 2x^2 + x - 3$ con el eje OX.

- ◆ En este caso $a=2$, $b=1$ y $c=-3$

- ◆ Aplicamos la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$

Obtendremos dos soluciones: $x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ y $x_2 = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Hay dos puntos de corte, que son: $(\frac{-3}{2}, 0)$ y $(1, 0)$.

Ejemplo: calculo de los puntos de corte de la función cuadrática

$y = x^2 - 4x + 4$ con el eje OX.

◆ En este caso $a=-1$, $b=4$ y $c=-4$

◆ Con la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$

En este caso obtenemos una sola solución.

Hay un punto de corte, que es: $(2, 0)$.

Ejemplo: calculo de los puntos de corte de la función cuadrática

$y = 3x^2 + 4$ con el eje OX.

◆ En este caso $a=3$, $b=0$ y $c=4$

◆ Aplicando la fórmula: $x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2}$

Como la raíz de un número negativo no se puede hacer en el conjunto de los números reales, en este caso no hay solución.

Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje OX.

- Con el eje OY: ahora, el punto será de la forma $(0, f(0))$.

$$f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$$

Luego, el punto de corte es $(0, c)$

Ejemplo: calculo del punto de corte de la función cuadrática $y = 2x^2 + x - 3$ con el eje OY.

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 0 - 3 = -3$$

El punto de corte es: $(0, -3)$.

Vértice de una parábola

Como puede observarse en las imágenes, una función cuadrática tiene un trozo (rama) que crece y otro que decrece. El punto donde se produce el cambio de crecer a decrecer, o de decrecer a crecer, se llama vértice y es el mayor (máximo) o menor (mínimo) valor que toma la función.

Podemos decir que este punto es el más significativo en una parábola, y por eso es importante saber calcularlo. Para ello, le damos a la variable independiente el valor $x =$

$\frac{-b}{2a}$, y lo sustituimos en la función para calcular “y”.

Dicho valor es fácil de recordar puesto que es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2º grado quitándole la raíz cuadrada, y se obtiene precisamente por el carácter de máximo o mínimo que tiene el vértice

Ejemplo:

Determinar las coordenadas del vértice de la función cuadrática $y = x^2 - 6x + 5$.

En este caso $a=1$, $b=-6$ y $c=5$. Y tendremos:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \quad y = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

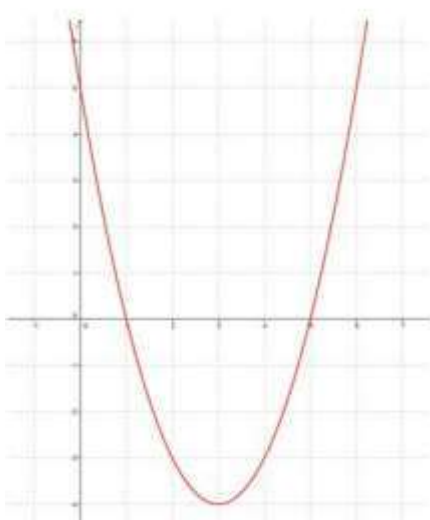
El vértice es el punto (3,-4).

Como $a=1>0$, la gráfica en este caso es convexa.

También podemos construir una tabla de valores:

	Vértice				
Valores para x	3	1	5	0	6
Resultados para y	-4	0	0	3	5

La representación gráfica es:



Ejemplo:

Determinar las coordenadas del vértice y representa gráficamente la función cuadrática $y = -3x^2 + 6x - 4$.

En este caso $a=-3$, $b=6$ y $c=-4$. Tendremos:

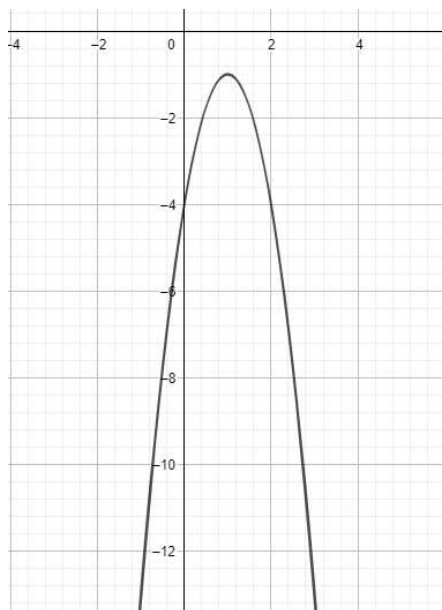
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1 \quad y = f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = -3 + 6 - 4 = -1$$

El vértice es el punto (1,-1).

Como $a=-3<0$, la gráfica en este caso es cóncava.
Construimos una tabla de valores:

	Vértice				
Valores para x	1	0	-1	2	3
Resultados para y	-1	-4	-13	-4	-13

La representación gráfica es:



Ejercicio 10

Dada la función cuadrática: $y = 2x^2 - 8$

- Determina sus puntos de corte con el eje OX
- Determina su punto de corte con el eje OY
- Calcula su vértice
- Completa la tabla

	Vértice				
Valores para x		1	2	-1	-2
Resultados para y					

- Haz su representación gráfica

Ejercicio 11

Dada la función cuadrática: $y = x^2 - 2x + 2$

- Determina sus puntos de corte con el eje OX
- Determina su punto de corte con el eje OY

c. Calcula su vértice

d. Completa la tabla

	Vértice				
Valores para x		2	3	0	-1
Resultados para y					

e. Haz su representación gráfica

4) Uso de funciones lineales y cuadráticas para modelizar situaciones

Podemos expresar situaciones de la vida real utilizando funciones matemáticas, lo que permite añadir un punto de vista diferente ante una situación problemática, punto de vista que puede ayudar a buscar nuevas soluciones o a avanzar en su búsqueda.

Cuando se utiliza una expresión matemática para representar una situación problemática, con la intención de resolverla, o ayudar a su resolución, se dice que se está usando un modelo matemático, en este campo, son de especial utilidad las funciones, puesto que sus gráficas suelen ser fáciles de interpretar y suelen aportar ideas para avanzar en la resolución de un problema.

4.1 Modelos usando funciones lineales.

Las funciones más simples son generalmente modelos lineales. Por ejemplo, la ecuación $y = 3x$ podría usarse para representar cuánto dinero recaudarías si vendieras x pulseras por 3 € cada una.

Muchas situaciones se pueden modelar con funciones lineales, sobre todo si en la situación que se trata de modelar aparece una proporción de aumento o disminución constante, en el ejemplo anterior, esta proporción serían 3 euros de aumento por cada pulsera vendida. Estas funciones sirven para modelizar situaciones de cambio constante, bien de aumento o de disminución.

Ejemplo

Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes.

Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado.

Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día, con un coste fijo inicial de 1000 €.

Queremos hacer un viaje de 10 días, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas?

Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. La función que corresponde a cada fórmula es:

- Fórmula 1: $y = 300 \cdot x$
- Fórmula 2: $y = 200 \cdot x + 1000$

En ambos casos x es el número de días. Para hacer una comparativa, completaremos una tabla de valores para cada fórmula y después dibujaremos sus gráficas:

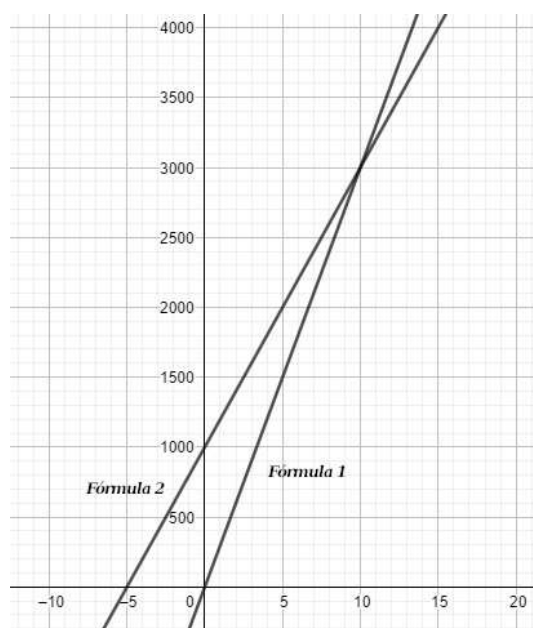
Fórmula 1

Valores para x	0	5	10
Resultados para y	0	1500	3000

Fórmula 2

Valores para x	0	5	10
Resultados para y	1000	2000	3000

En la tabla observamos que, al llegar a los 10 días de viaje los precios se equiparan, para hacer las gráficas necesitamos adaptar las escalas de los ejes, con el objeto de poder hacer interpretaciones:



Vemos que, al tener distinta pendiente, ambas rectas se cortan en un punto:

$$300x = 200x + 1000 \rightarrow 300x - 200x = 1000 \rightarrow 100x = 1000 \rightarrow x = 10$$

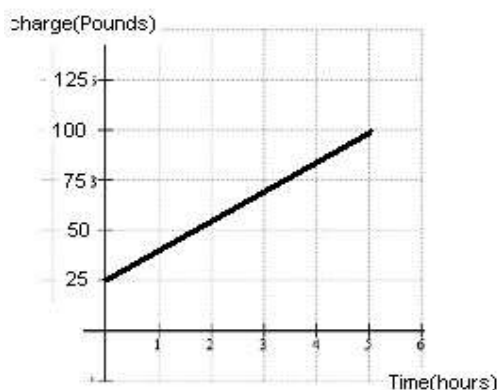
Si $x=10$ entonces será $y=300 \cdot 10 = 3000$, y el punto de corte (10,3000)

Como vemos en la gráfica, a partir de 10 días es preferible viajar según la fórmula 2, ya que el viaje saldrá más barato, mientras que si la duración es inferior a 10 días, la mejor fórmula es la 1.

Ejercicio 12

Un fontanero cobra un cargo fijo por visita y una tarifa por hora. El gráfico muestra los cargos realizados por trabajos de hasta 4 horas.

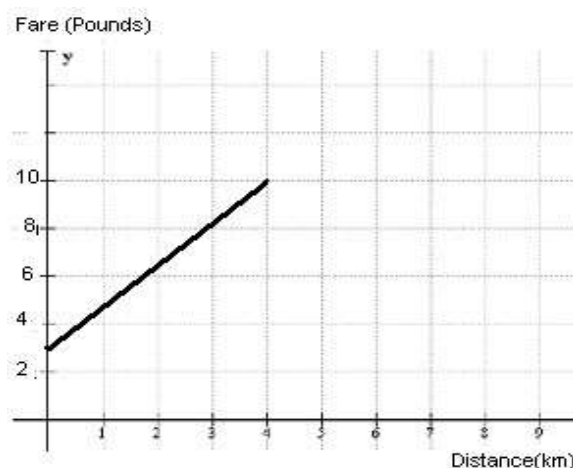
- ¿Cuál es el cargo fijo por llamada?
- ¿Cuál es la tarifa por hora?
- Escribe la ecuación de la recta en la forma $y=mx+n$
- Calcula el coste total de un trabajo que dura 8 horas.



Ejercicio 13

El gráfico muestra la tarifa del taxi para trayectos de hasta 3 km.

- a) ¿Cuál es el cargo fijo?
- b) ¿Cuál es el cargo por kilómetro?
- c) Escribe la ecuación de la recta en la forma $y = m \cdot x + n$
- d) Calcular el precio del taxi para un recorrido de 5 km.



4.2 Modelos usando funciones cuadráticas.

Las funciones cuadráticas pueden ser utilizadas como modelos en supuestos un poco más complicados que los que implican el uso de funciones lineales, generalmente en situaciones que impliquen la multiplicación de una variable consigo misma, lo que lleva a la aparición de un término al cuadrado.

Por ejemplo, la función $A(x) = x^2 + 10x$ podría ser utilizada para representar el área de un terreno rectangular, cuyo lado mayor supera en 10 metros al lado menor. Este modelo podría ser utilizado para identificar el área máxima posible para la parcela de tierra.

Otro ejemplo es una situación en la que se lanza una pelota al aire. El balón viajará hacia arriba, y luego viajará hacia abajo hasta que golpee el suelo, si observamos la trayectoria de la pelota en un lanzamiento de este tipo, podemos darnos cuenta de su forma parabólica. Podemos entonces estudiar la situación y dar respuesta a preguntas del tipo: ¿Cuánto ha subido la pelota? ¿Cuándo llegará al suelo?

Este tipo de situación puede ser modelada por una función de la forma $h(t) = -16t^2 + v_0t + h_0$. Donde la variable t representa el tiempo desde que se lanzó el balón. El coeficiente v_0 representa la velocidad inicial de la pelota, y la constante h_0 representa la altura inicial de la pelota. La constante -16 proviene de la fuerza de gravedad que tira de la pelota hacia abajo, razón por la cual es negativa.

Ejemplo

Supongamos que lanzamos el balón desde una altura de 2 metros, con una velocidad inicial de 10 metros por segundo hacia arriba y que la gravedad de la Tierra reduce la velocidad del balón a un ritmo de 5 metros por segundo al cuadrado. La función que modela la altura del balón para un tiempo determinado después de su lanzamiento es:

$h(x) = -5x^2 + 10x + 2$, donde x es el tiempo, en segundos, transcurrido desde el lanzamiento del balón. Podemos responder a preguntas como: ¿cuanto tiempo tardará el balón en llegar a su punto más alto? ¿cuál será el valor de esta altura máxima? O ¿cuánto tiempo tardará en tocar el suelo?

Para realizar el estudio vamos a representar gráficamente la parábola, calculando en primer lugar su vértice:

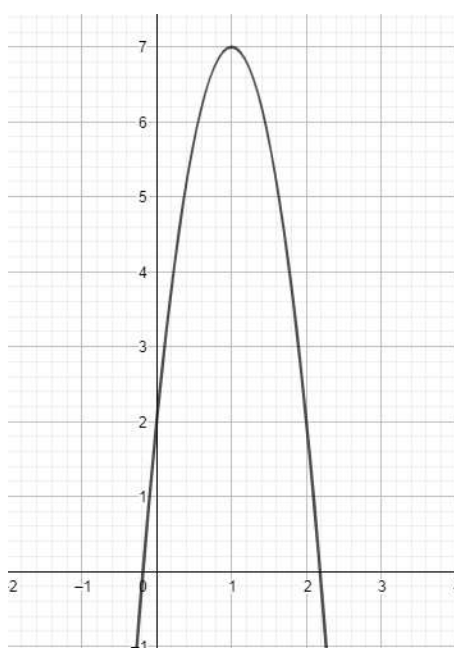
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-5)} = \frac{-10}{-10} = 1 \quad y_0 = h(1) = -5 + 10 + 2 = 7$$

El vértice es el punto $(1,7)$, y como $a = -5 < 0$, la función cuadrática es cóncava.

A continuación, construimos una tabla de valores y representamos la función:

	Vértice		
Valores para x	1	0	2
Resultados para y	7	2	2

La gráfica será:



Luego, en respuesta a las preguntas:

- ¿cuanto tiempo tardará el balón en llegar a su punto más alto?

Como el vértice es $(1,7)$, el tiempo que tarda en alcanzar el punto más alto es 1 segundo.

- ¿cuál será el valor de esta altura máxima?

Como el vértice es $(1,7)$, el valor de la altura máxima es de 7 metros.

- ¿Cuánto tiempo tardará en tocar el suelo?

Para responder a esta pregunta necesitamos calcular los puntos de corte con el eje OX, para ello resolvemos la ecuación $h(x) = -5x^2 + 10x + 2 = 0$

En este caso $a = -5$, $b = 10$ y $c = 2$, luego:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 2}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 40}}{-10} = \frac{-10 \pm \sqrt{140}}{-10}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{140}}{-10} = -0'18 \quad x_2 = \frac{-10 - \sqrt{140}}{-10} = 2'18$$

Luego, el punto de corte que nos interesa es $(2'18, 0)$, en consecuencia, la pelota tardará en tocar el suelo 2'18 segundos.

Ejercicio 14

Obtén una función con la que se calcule el área de un rectángulo, sabiendo que el lado mayor es 10 metros más largo que el lado menor.

- Determina la función que modela esta situación, en función de la longitud del lado menor.
- Represéntala gráficamente

Ejercicio 15

Estás parado en el techo de un edificio que está a 20 metros sobre el suelo. Lanzas una bola al aire con una velocidad vertical inicial de 40 metros por segundo, para que caiga a la calle. La función que modela el movimiento de la pelota es: $y = -16x^2 + 40x + 20$, donde x es el tiempo en segundos desde que se produce el lanzamiento.

- ¿Qué altura máxima alcanza la pelota?
- ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar esa altura máxima?
- ¿Cuándo golpeará la pelota al suelo?
- Representa gráficamente esta situación.

Ejercicio 16

La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tienen el padre y el hijo?

El hijo tiene ____ años y el padre ____ años.

Ejercicio 17

Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que si al cuadrado del mayor se le resta el cuadrado de los otros dos, se obtiene el número 12 ¿Cuáles son estos tres números?

Hay ____ soluciones, los números _____, y los números _____

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

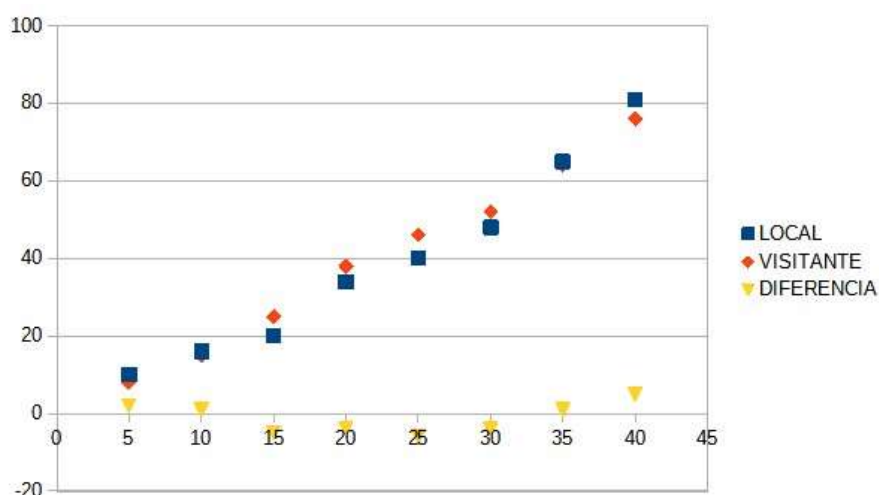
Durante un partido de baloncesto hemos tomado notas sobre los resultados, son los siguientes:

Tiempo (en minutos)	Equipo local	Equipo visitante
5	10	8
10	16	15
15	20	25
20	34	38
25	40	46
30	48	52
35	65	64
40	81	76

a) Elaborar una tabla que contenga la diferencia entre los marcadores del equipo local y el visitante.

Tiempo	5	10	15	20	25	30	35	40
Diferencia	+2	+1	-5	-4	-6	-4	+1	+5

b) Dibujar una gráfica con los datos del equipo local, una gráfica con los datos del equipo visitante y una gráfica que represente la diferencia.



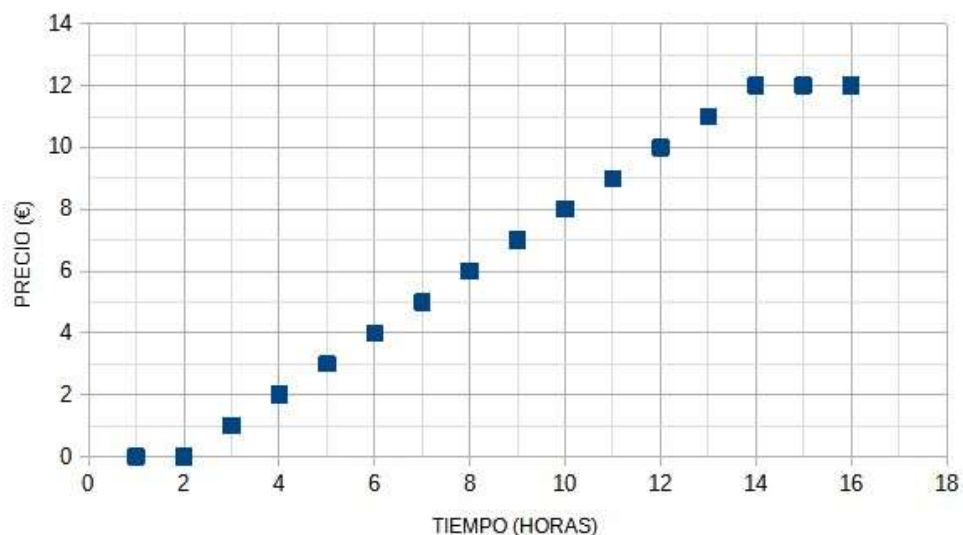
Ejercicio 2

Esta es la lista de precios de un aparcamiento que está abierto de 9 h a 22 h.

- Primera y segunda hora Gratis
- Tercera hora y consecutivas o fracción 1€ cada una

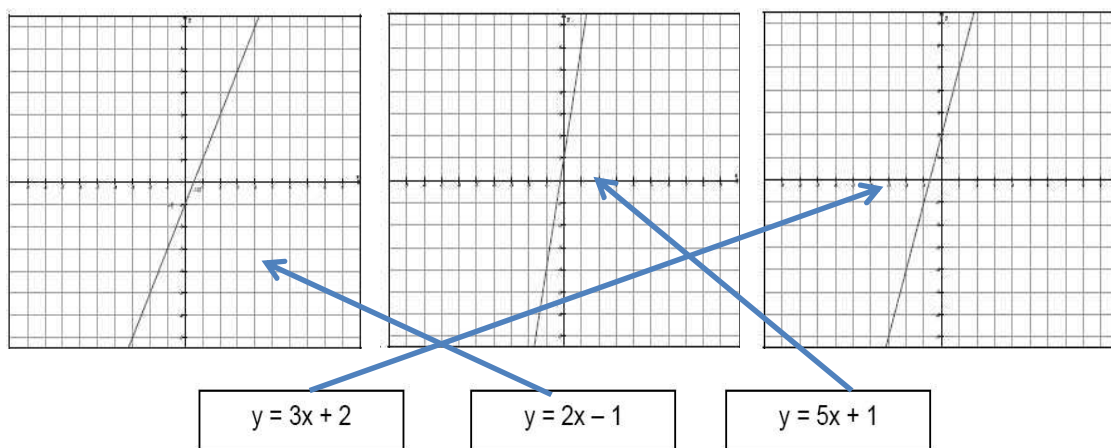
- Máximo diario 12€

Dibuja la gráfica de la función que relaciona el tiempo de estacionamiento con su precio.



Ejercicio 3

Asigna a cada ecuación la representación gráfica que le corresponde y explica cómo hiciste tu elección.



La elección se ha hecho teniendo en cuenta el valor de la pendiente y el punto de corte con el eje OY

- Pendiente: los valores son 3, 2 y 5, respectivamente, y a mayor valor mayor inclinación.
- Puntos de corte: son (0,2), (0,-1) y (0,1), respectivamente.

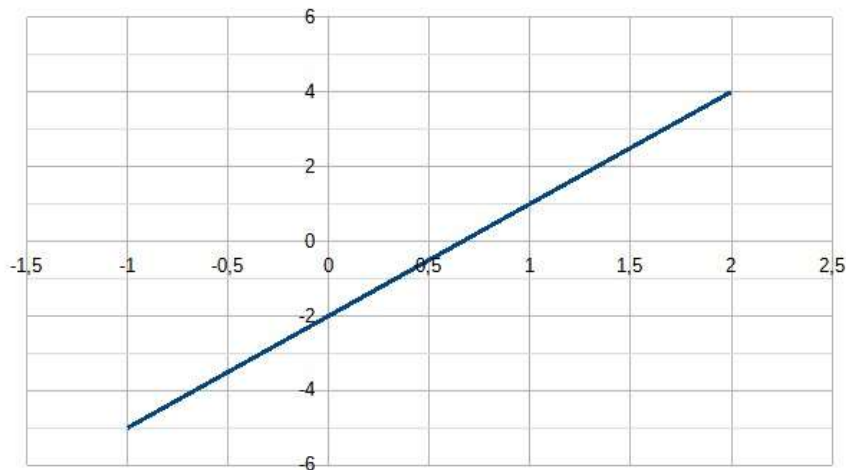
Ejercicio 4

Responda "verdadero" o "falso" en cada caso:

- a) $y = 5x$ es más pronunciado que $y = 3x$ (verdadero)
- b) $y = 2x$ es paralelo a $y = 2x + 4$ (verdadero)
- c) $y = 4x$ es más pronunciado que $y = x - 5$ (verdadero)
- d) $y = 2x$ es paralela a $y = x + 2$. (falso)

Ejercicio 5

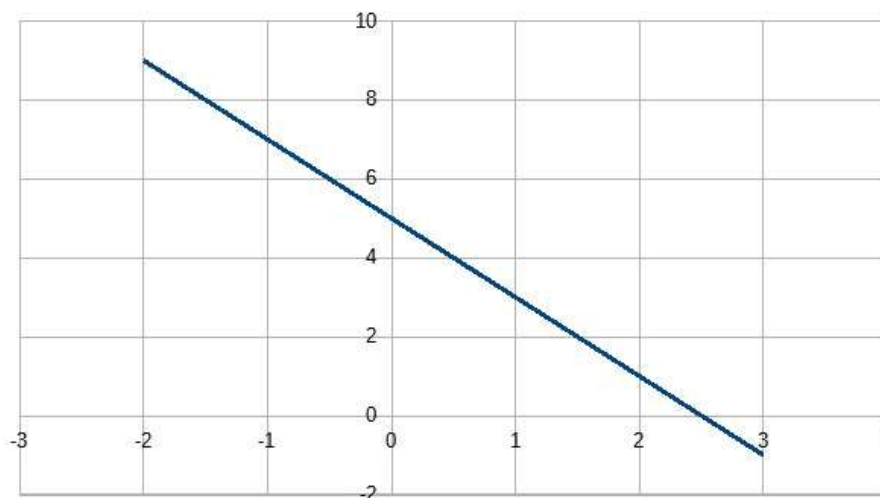
Dibuja la gráfica de $y=3x-2$ para valores de x de -1 a 2 .



¿Cuáles son las coordenadas del punto donde la gráfica cruza el eje y ?
 $(0, -2)$

Ejercicio 6

Dibuja la gráfica de $y=5-2x$ para valores de x de -2 a 3 .



- a) el valor de y cuando $x=0$ es $y=5$
- b) el valor de x cuando $y=0$ es $x=2,5$
- c) el valor de x cuando $y=8$ es $x=-1,5$

Ejercicio 7

Escribe la pendiente y la intersección con el eje y para cada una de las siguientes gráficas.

- a) $y=3x+5$ pendiente: $m=3$, corte con OY : $(0, 5)$
- b) $y=4x-1$ pendiente: $m=4$, corte con OY : $(0, -1)$

c) $y=6-x$ pendiente: $m=-1$, corte con OY: $(0,6)$

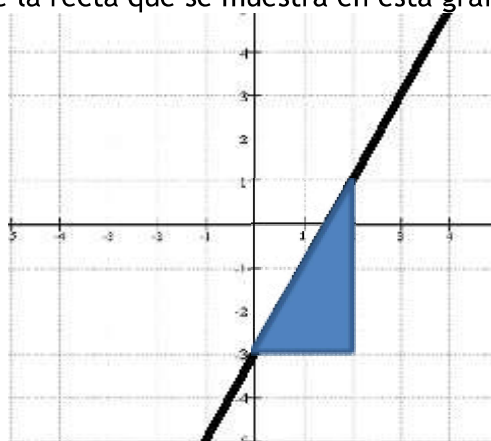
Ejercicio 8

Escribe la ecuación de la recta que tiene pendiente -7 y corta al eje y en el punto $(0,4)$

$$y = -7x + 4$$

Ejercicio 9

Encuentra la ecuación de la recta que se muestra en esta gráfica.



La pendiente es: $m = \frac{\text{Aumento vertical}}{\text{Avance horizontal}} = \frac{4}{2} = 2$, el corte con OY es $n=-3$

Luego, la ecuación es: $y = 2x - 3$

Ejercicio 10

Dada la función cuadrática: $y = 2x^2 - 8$

- a. Estudia su concavidad o convexidad y determina sus puntos de corte con el eje OX

Como $a=2>0$, es convexa.

$$2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm \sqrt{64}}{4} = \pm 2$$

Solución: $(-2,0)$ y $(2,0)$

- b. Determina su punto de corte con el eje OY

$$y(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8$$

Solución: $(0,-8)$

- c. Calcula su vértice

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{4} = 0 \quad y(0) = -8$$

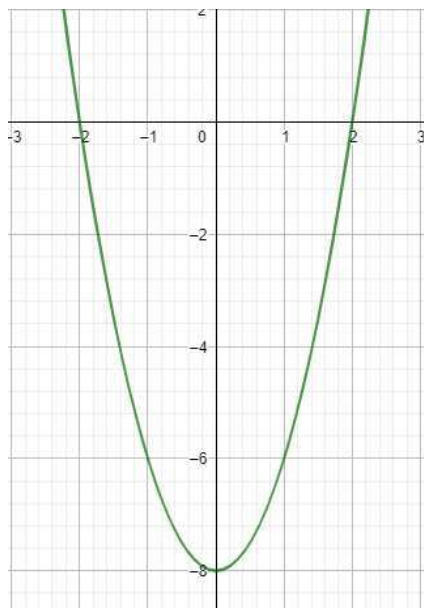
Solución: $(0,-8)$

- d. Completa la tabla

Vértice

Valores para x	0	1	2	-1	-2
Resultados para y	-8	-6	0	-6	0

e. Haz su representación gráfica



Ejercicio 11

Dada la función cuadrática: $y = x^2 - 2x + 2$

- a. Estudia su concavidad o convexidad y determina sus puntos de corte con el eje OX

Como $a=1>0$, es convexa.

Solución: No tiene puntos de corte con el eje OX.

- b. Determina su punto de corte con el eje OY

Solución: (0,2)

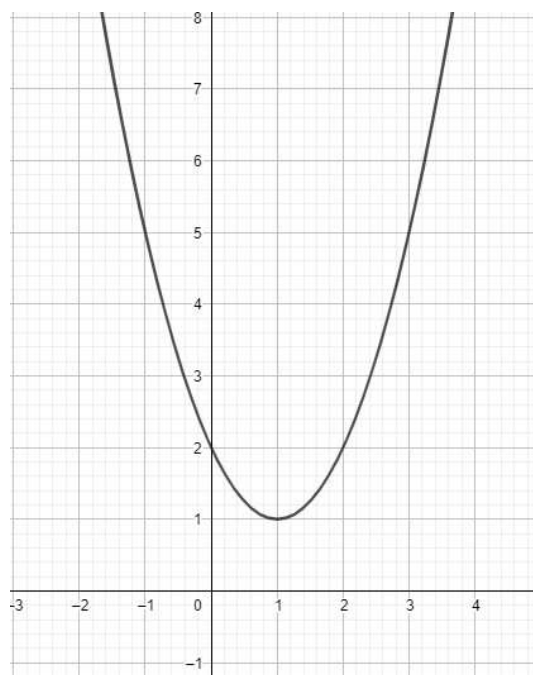
- c. Calcula su vértice

Solución: (1,1)

- d. Completa la tabla

	Vértice				
Valores para x	1	2	3	0	-1
Resultados para y	2	2	5	2	5

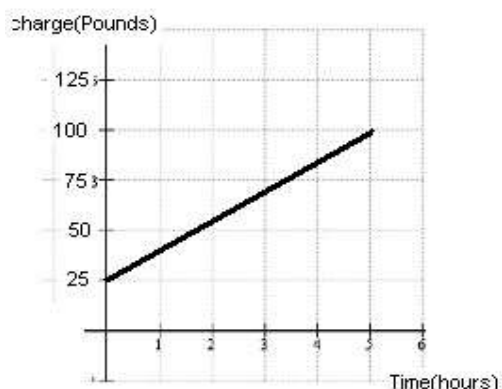
e. Haz su representación gráfica



Ejercicio 12

Un fontanero cobra un cargo fijo por visita y una tarifa por hora. El gráfico muestra los cargos realizados por trabajos de hasta 4 horas.

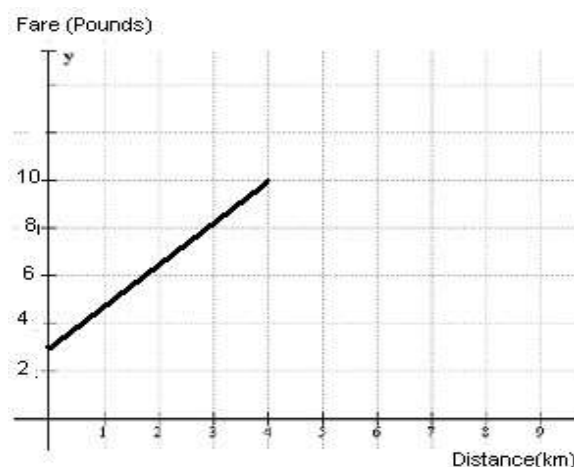
- a) ¿Cuál es el cargo fijo por llamada?
Solución: 25€
- b) ¿Cuál es la tarifa por hora?
Solución: 15€
- c) Escribe la ecuación de la recta en la forma $y=mx+n$
Solución: $y=15x+25$
- d) Calcula el coste total de un trabajo que dura 8 horas.
Solución: 145€



Ejercicio 13

El gráfico muestra la tarifa del taxi para trayectos de hasta 3 km.

- a) ¿Cuál es el cargo fijo?
Solución: 3€
- b) ¿Cuál es el cargo por kilómetro?
Solución: $\frac{7}{4} = 1.75$
- c) Escribe la ecuación de la recta en la forma $y= m.x + n$
Solución: $y = 1,75 x + 3$
- d) Calcular el precio del taxi para un recorrido de 5 km.
Solución: 11.75€



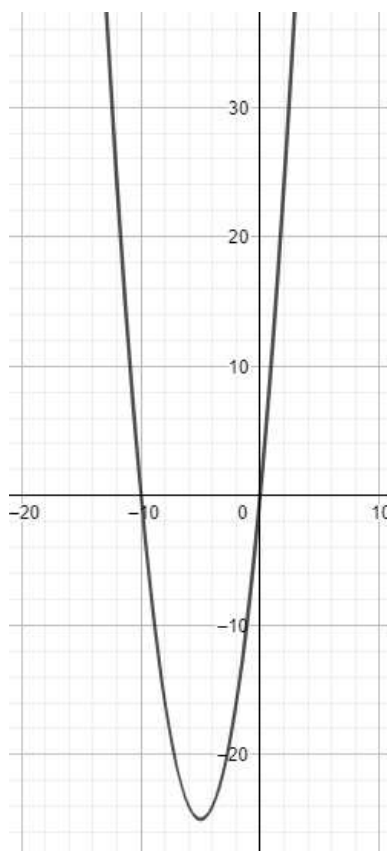
Ejercicio 14

Obtén una función con la que se calcule el área de un rectángulo, sabiendo que el lado mayor es 10 metros más largo que el lado menor.

- a. Determina la función que modela esta situación en función de la longitud del lado menor.

Solución: $y = x^2 + 10x$

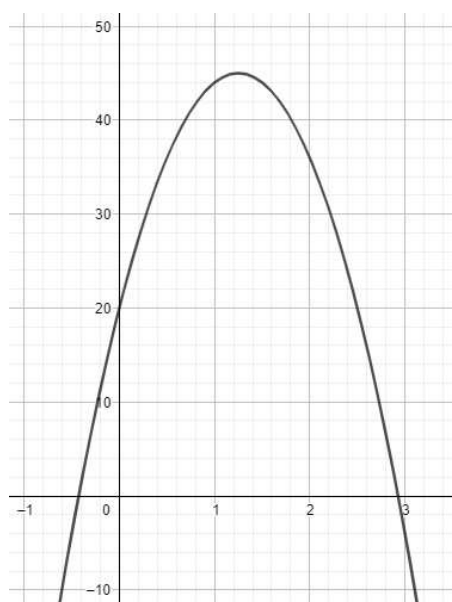
- b. Representala gráficamente



Ejercicio 15

Estás parado en el techo de un edificio que está a 20 metros sobre el suelo. Lanzas una bola al aire con una velocidad vertical inicial de 40 metros por segundo, para que caiga a la calle. La función que modela el movimiento de la pelota es: $y = -16x^2 + 40x + 20$, donde x es el tiempo en segundos desde que se produce el lanzamiento.

- a) ¿Qué altura máxima alcanza la pelota?
Solución: 45 metros
- b) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar esa altura máxima?
Solución: 1,25 segundos
- c) ¿Cuándo golpeará la pelota al suelo?
Solución: a los 2'93 segundos
- d) Representa gráficamente esta situación.



Ejercicio 16

La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tienen el padre y el hijo?

El hijo tiene 6 años y el padre 36 años.

Ejercicio 17

Dados tres números naturales pares consecutivos, se sabe que si al cuadrado del mayor se le resta el cuadrado de los otros dos, se obtiene el número 12 ¿Cuáles son estos tres números?

Hay dos soluciones, los números 4, 6 y 8, y los números 0, 2 y 4.