

Parte nº 7. Tema III-2.

La proporcionalidad su representación gráfica y sus aplicaciones.

ÍNDICE

- 1) Proporcionalidad directa
 - 2) Cálculo de porcentajes.
 - 3) Proporcionalidad inversa
 - 4) Aplicaciones
 - 4.1. Los porcentajes en la economía.
 - 4.2. Escalas
-

Introducción

Una magnitud es cualquier propiedad de los cuerpos que puede ser medida, como el tamaño, el peso o la extensión.

Si establecemos una relación de comparación de dos cantidades, obtenidas al medir magnitudes, obtendremos la razón entre esas magnitudes. Esta comparación la podemos hacer de dos maneras:

1. Hallando en cuanto excede una cantidad a la otra, es decir restándose.
2. Hallando cuántas veces contiene una cantidad a la otra, es decir, dividiéndose.

De aquí que haya dos clases de razones, razón aritmética o por diferencia y razón geométrica o por cociente.

- Razón ARITMÉTICA. Es la diferencia indicada de dos cantidades que se comparan. Por ejemplo, la razón aritmética entre 60 y 12 será 48. Pues $60-12=48$
- Razón GEOMÉTRICA. Es el cociente entre dos cantidades de magnitudes comparables entre sí. Por ejemplo, la razón geométrica entre 60 y 12 será 5. Ya que $\frac{60}{12} = 5$.

Una proporción es la igualdad de dos razones.

- Una proporción se llama aritmética si se igualan dos razones aritméticas, por ejemplo: $9-7 = 15-13$. En este caso la razón de proporcionalidad se denomina diferencia y es igual a 2.
- Una proporción se llama geométrica si se igualan dos razones geométricas, por ejemplo $\frac{60}{12} = \frac{20}{4}$. En este caso la razón de proporcionalidad se denomina razón y es igual a 5.

En este tema trataremos el caso de la proporcionalidad geométrica, sus tipos y su representación gráfica. También estudiaremos algunas de sus principales aplicaciones.

1) Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. Por ejemplo, si dos cajas contienen 24 bombones, diez cajas (iguales a las primeras) contendrán 120 bombones:

$$2 \cdot 12 = 24 \quad 10 \cdot 12 = 120$$

La razón de proporcionalidad directa k se obtiene mediante el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, En el ejemplo anterior tendremos:

$$\frac{24}{2} = \frac{120}{10} = 12$$

En consecuencia, siempre que tienes dos cantidades, cuando una se duplica o triplica, etc., la otra cantidad se duplica o triplica, etc., y cuando dividimos la primera a la mitad, la segunda también se divide por la mitad, eso significa que aumentan o disminuyen en la misma proporción, entonces tienes directa. proporción.

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el cociente de los valores de cada una es siempre el mismo, por lo que podemos utilizar esta propiedad para obtener uno de los valores desconocidos de cualquier magnitud.

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$

Por ejemplo: un coche consume 10 litros de combustible cada 125 km. Esta tabla muestra el uso de combustible relacionado con la longitud.

Distancia (km)	125	250	500	700	1000
Combustible (l)	10	20	40		80

Cuando obtenemos la razón con los diferentes valores de cada magnitud obtenemos siempre

$$\text{lo mismo. } \frac{125}{10} = \frac{250}{20} = \frac{500}{40} = \frac{1000}{80} = 12.5$$

Podemos usar esta propiedad para obtener los valores desconocidos de cualquier magnitud..

$$12.5 = \frac{700}{x} \rightarrow x = \frac{700}{12.5} = 56$$

Podemos resolver estos problemas utilizando el método unitario:

1. Convertimos la proporción en 1:n o n:1 (lo más conveniente)
2. Multiplicamos por la tercera cantidad.

Por ejemplo:

1. Si el coche gasta 10 l de combustible en recorrer 125 km, para recorrer 1 km...

$$\frac{10}{125} = 0.08 \text{ l}$$

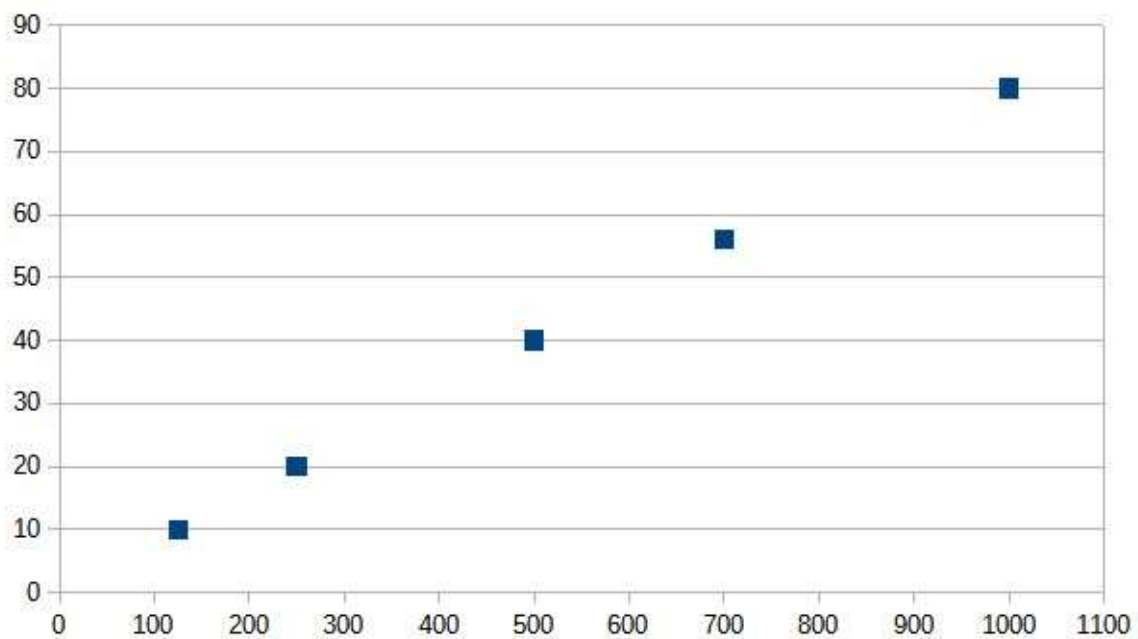
2. Luego, para recorrer 700, $700 \times 0.08 = 56 \text{ l}$.

10 l ----- 125 km
x l ----- 700 km

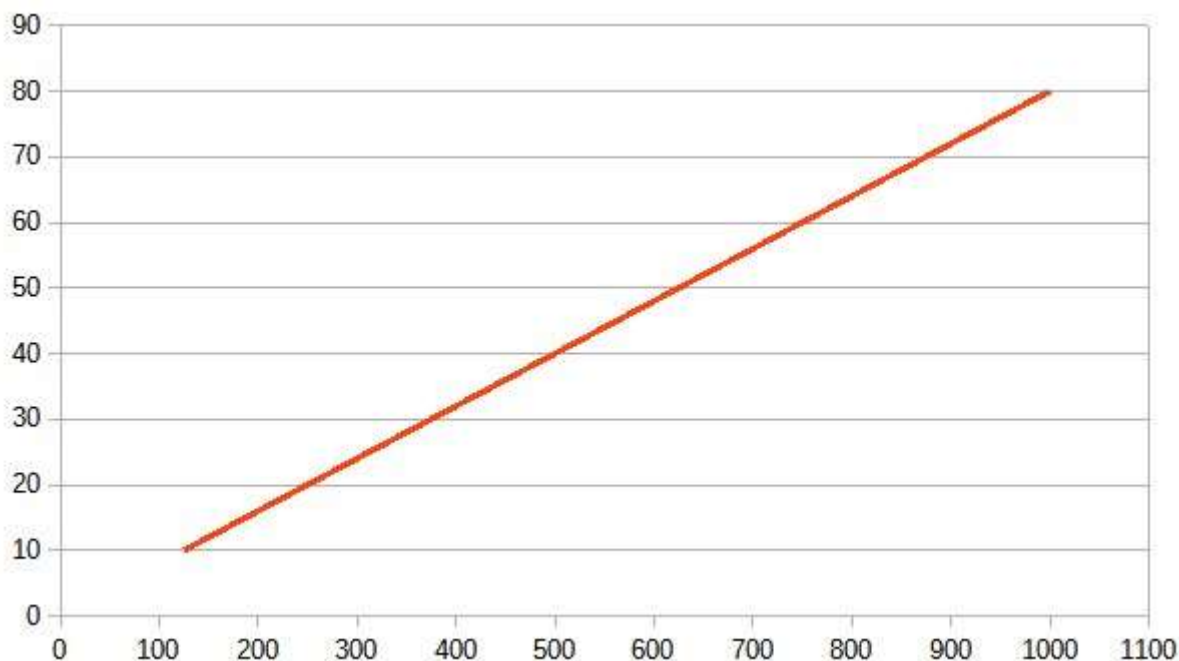
Los pares de valores relacionados que se incluyen en la tabla se pueden representar gráficamente utilizando unos ejes de coordenadas perpendiculares, de manera que la una de las magnitudes se representa en el eje horizontal, a esta variable se la denomina denominada variable independiente. La otra magnitud se representa en el eje vertical y se denomina variable dependiente, que normalmente se corresponde con los valores que se calculan.

Las gráficas describen la relación que existe entre dos variables y ayudan a estudiar esta relación, a analizarla y extraer conclusiones. Para ello se debe observar de izquierda a derecha, y ver como varía la variable dependiente, al aumentar la variable independiente.

Para hacer la representación en una gráfica, empezamos dibujando los ejes y, dependiendo de los valores que tenemos que representar, hacemos las divisiones para los valores de las magnitudes, después dibujamos los puntos que corresponden a cada par de valores de la tabla de datos, en este caso:



A continuación unimos los puntos para obtener la representación gráfica:



Ejercicio 1

La siguiente tabla, que contiene sólo algunos valores, relaciona metros tela con su precio.

Metros de tela	3	7		12	1
Precio (€)	5		9		

- ¿Cuál es la razón del precio con respecto a los metros de tela comprados?
- Justifica que se trata de una relación de proporcionalidad directa.
- Completa la tabla.
- Representa gráficamente esta relación.

Ejercicio 2

La siguiente tabla, que contiene sólo algunos valores, relaciona litros de gasolina comprados y su precio en euros:

Litros de gasolina	1		5	7	
Precio (€)		40	6,20		50

- ¿Cuál es la razón del precio con respecto a los litros de gasolina comprados?
- Justifica que se trata de una relación de proporcionalidad directa.
- Completa la tabla.
- Representa gráficamente esta relación.

2) Porcentajes

Un porcentaje es una razón hasta 100. Por lo tanto, un porcentaje puede considerarse como una fracción con denominador 100.

$$\frac{1}{100} \text{ significa } 1\% \text{ (es decir, uno por cada cien)}$$

$$\frac{5}{100} \text{ significa } 5\% \text{ (es decir, cinco por cada cien)}$$

$$\frac{20}{100} \text{ significa } 20\% \text{ (es decir, veinte por cada cien)}$$

Para convertir una fracción en porcentaje multiplicamos el numerador por 100 y hacemos la división, por ejemplo, la proporción $\frac{3}{8}$ se puede expresar como $\frac{3 \cdot 100}{8} = 37,5\%$

Para convertir un porcentaje en fracción, se escribe como una fracción con denominador 100 y luego se simplifica la fracción, si es posible, por ejemplo, $65\% = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$.

Calcular un porcentaje de una cantidad

Para calcular el porcentaje de una cantidad debemos multiplicarlo por el por ciento y dividirlo por 100.

$$35\% \text{ de } 28 = \frac{35}{100} \cdot 28 = 9,8$$

Calcula el total a partir del porcentaje.

Calcular el total a partir del porcentaje y la parte se puede hacer usando proporción directa, por ejemplo: si en la clase 13 estudiantes no hicieron sus tareas, esto fue el 52% de la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en esta clase?

$$\begin{array}{rcl} 52 & \text{-----} & 100 \text{ total} \\ 13 & \text{-----} & x \text{ total} \end{array}$$

$$\text{luego } x = \frac{13 \cdot 100}{52} = 25 \text{ estudiantes.}$$

Calcular un número aumentado o disminuido en un porcentaje.

Se puede hacer en dos pasos:

1. Calcular el % de la cantidad.
2. Suma o resta el porcentaje de la cantidad original.

Por ejemplo: la población de un pueblo es 63500 y el año pasado aumentó un 8%, ¿cuál es la población ahora?

$$8\% \text{ de } 63500 \text{ es } \frac{63500 \times 8}{100} = 5080$$

Luego, la población ahora será: $63500 + 5080 = 68580$

También puede hacerse utilizando una regla de tres de la forma:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \text{-----} & 100 + \text{aumento/} - \text{disminución porcentual} \\ \text{Valor inicial} & \text{-----} & x \text{ (Valor final)} \end{array}$$

En el ejemplo anterior sería:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \text{-----} & 108 \text{ aumento de 8 en cada 100} \\ 63500 & \text{-----} & x \text{ aumento en la cantidad dada.} \end{array}$$

$$\text{luego } x = \frac{63500 \cdot 108}{100} = 68580 \text{ personas.}$$

Calcular un valor inicial, conocido el valor aumentado o disminuido en un porcentaje.

También puede hacerse utilizando una regla de tres de la forma:

$$100 \text{ ----- } 100 + \text{aumento/} - \text{disminución porcentual}$$

Valor inicial ----- Valor final

Por ejemplo: la población de un pueblo ha disminuido un 3% en un año, siendo ahora de 145500 personas. ¿Cuál era la población hace un año?

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{-----} & 97 \\ x & \text{-----} & 145500 \end{array}$$

Luego, la población hace un año era: $\frac{145500 \times 100}{97} = 150000$ personas

Encontrar el % de aumento o disminución

Si conocemos la cantidad de aumento o disminución y el valor inicial podemos encontrar el % de aumento o disminución usando proporciones.

$$\begin{array}{ccc} \text{Valor inicial} & \text{-----} & \text{aumento/disminución} \\ 100 & \text{-----} & x \text{ \% con aumento/disminución porcentual} \end{array}$$

Por ejemplo: el año pasado una empresa contaba con 1.560 empleados, este año se han contratado 230 nuevas personas. ¿Cuál ha sido el % de incremento del personal en la empresa?

$$\begin{array}{ccc} 1560 & \text{-----} & 1790 \\ 100 & \text{-----} & x \end{array}$$

Tendremos $x = \frac{1790 \times 100}{1560} = 114.74$, por lo tanto el incremento porcentual será de $114.74 - 100 = 14.74\%$

Por ejemplo: he pagado 215€ por un abrigo y el precio original era 230€. ¿Cuál es el % de descuento?

$$\begin{array}{ccc} 230 & \text{-----} & 215 \\ 100 & \text{-----} & x \end{array}$$

Tendremos $x = \frac{215 \times 100}{230} = 93.47$, por lo tanto el descuento porcentual será de $100 - 93.47 = 6.53\%$

Ejercicio 3

Convierte los siguientes porcentajes a fracciones.

- a) 35% b) 3.4% c) 560% d) 40% e) 0.7%

Ejercicio 4

Convierte los siguientes fracciones a porcentajes.

- a) 0.15 b) 0.634 c) 1/6 d) 5/12 e) 0.12

Ejercicio 5

La población de una ciudad es de 652.000 habitantes y el 35% de ellos vive en el distrito central. ¿Cuántos de ellos viven en este distrito?

Ejercicio 6

En Albacete el 6% de la población son inmigrantes y en nuestra ciudad viven 9900 inmigrantes ¿cual es la población de Albacete?

Ejercicio 7

Calcula el precio de los siguientes artículos antes del 15% de descuento.

- a) Chaqueta 200€ b) Coche 15800€ c) Zapatos 80€

Ejercicio 8

El precio de un horno eléctrico antes de impuestos es de 560€ y después de aplicar los impuestos es de 672€, ¿qué porcentaje corresponde a los impuestos?

Ejercicio 9

Si una bicicleta antes de las rebajas costaba 1.400€ y luego 1.275€, ¿Qué porcentaje de descuento nos han hecho?

3) Proporcionalidad inversa

Fíjate en la relación que existe entre el número de miembros de una familia y los días que les dura una caja de manzanas (supongamos que todas las personas comen la misma cantidad de manzanas al mismo ritmo). Observa que cuantas más personas hay en la familia menos dura la caja de fruta, y cuantas menos personas hay, más dura. Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

Decimos que hay proporcionalidad inversa entre dos magnitudes si al aumentar una magnitud, (doble, triple...) la otra disminuye (mitad, tercio...), al disminuir una (mitad, tercio...), la otra aumenta (doble, triple...). ...).

Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de los valores de cada una es siempre el mismo, por lo que podemos usar esta propiedad para obtener uno de los valores desconocidos de cualquier magnitud.

Magnitud A	a_1	a_2	a_3
Magnitud B	b_1	b_2	b_3

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3$$

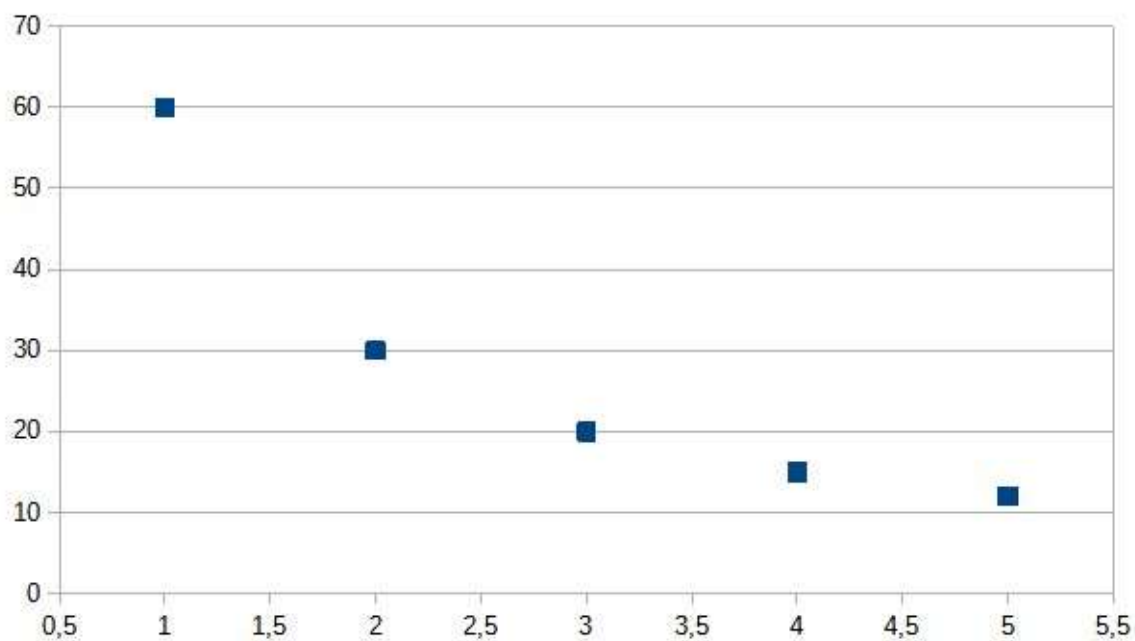
Supongamos que conduces un coche y vas a recorrer 60 km, supongamos que pasas 1 hora conduciendo. Su velocidad promedio sería de 60 km/h. Supongamos que pasas 2 horas conduciendo. Su velocidad promedio será de 30 km/h. Entonces, al cambiar la cantidad de horas que conduce, la velocidad promedio a la que viaja también cambiará.

Esto lo podemos ver en la siguiente tabla.

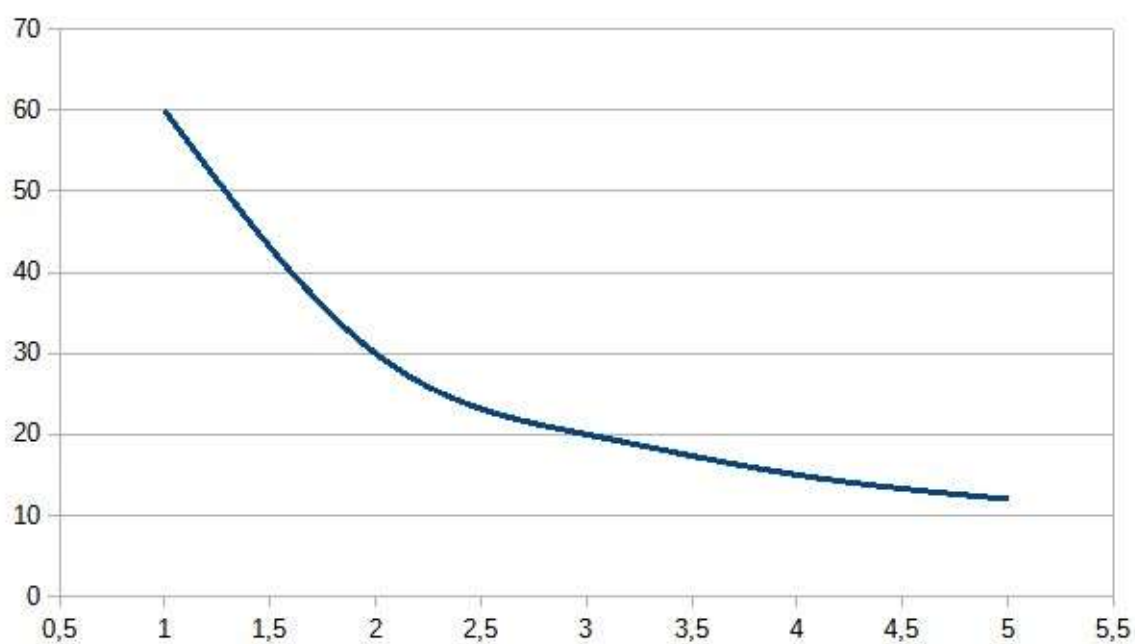
Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6
Velocidad media	60 Km/h	30 Km/h	x	15 Km/h	12 Km/h	10 Km/h

$$1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot x \rightarrow 60 = 3 \cdot x \rightarrow x = \frac{60}{3} = 20 \text{ km/h}$$

El proceso de representación gráfica es el mismo que hemos utilizado para proporcionalidad directa, el primer paso en este caso será:



las La representación gráfica se estos datos es:



Ejemplo

Si 18 personas pueden hacer un trabajo en 10 días, ¿en cuánto tiempo tardarán 45 personas en hacer el mismo trabajo?

Esta es una proporción inversa porque con el doble de hombres que antes, se requiere la mitad de los días para hacer el trabajo. Usando un formato de tabla tenemos:

Numero de trabajadores	18	45
Cantidad de días	10	x

Luego, será: $18 \cdot 10 = 45 \cdot x \rightarrow x = \frac{18 \cdot 10}{45} = 4$ días

Ejercicio 10

Dos bombas tardan 5 días en vaciar una piscina.

- a) Justifica el tipo de relación, directa o inversa.
- b) ¿Cuánto tiempo tardarán 5 bombas en vaciar la misma piscina?
- c) Completa la tabla

Numero de bombas	1	2		5	8
Días en vaciar la piscina		5	2,5		

- d) Representa graficamente estos datos

4) Aplicaciones

En este apartado veremos algunas aplicaciones de la proporcionalidad, en particular aplicaciones a la economía y al trabajo con escalas.

2.1. Los porcentajes en la economía.

2.1.1 El impuesto sobre el valor añadido (IVA).

Al realizar cualquier compra, el proveedor añade al precio del objeto que compras un impuesto llamado impuesto del valor añadido (o simplemente IVA) que posteriormente entrega a Hacienda. El valor de ese impuesto es un porcentaje del importe de la compra. Dependiendo de lo que adquieras, el porcentaje a aplicar es distinto. De forma que el general es del 21%, el reducido del 10% y el super reducido del 4%.

Veamos un caso concreto: si compras un ordenador cuyo precio de catálogo es de 720 €, para calcular el importe del IVA debes aplicar un tipo del 21%. Por tanto, el importe del impuesto será de

$$720 \cdot \frac{21}{100} = 151,2$$

sumándolo al precio de catálogo, resulta un precio final de $720 + 151,2 = 871,20$ €.

La cantidad resultante del impuesto se añade a su precio y se obtiene así el precio de compra.

También se puede calcular así:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \text{-----} & 121 \\ 720 & \text{-----} & x \end{array}$$

$$\text{Donde } x = \frac{121 \cdot 720}{100} = 871,20$$

EJERCICIO 11

Cuánto tendremos que pagar con IVA incluido del 21%, por un coche cuyo precio sin IVA es de 20.500€.

EJERCICIO 12

En unos conocidos almacenes de electrodomésticos nos ofrecen un jueves sin IVA, si el precio de un lavavajillas es de 968€ sin ese descuento, ¿cuánto nos costaría sin el IVA?

2.1.2 El interés simple.

Las entidades financieras (bancos, cajas de ahorro) dan a sus clientes una cantidad de dinero anual que es proporcional al dinero que tienen guardado o depositado en ellas. Esta cantidad de dinero se llama **interés**.

Veamos un ejemplo: Isabel tiene ahorrados 3.000,00 € en la caja de ahorros del barrio, que le da un 2,5% anual por este dinero. ¿Qué interés le produce su capital al final de año? ¿Y en 3 años?

Que el tipo de interés sea del 2,5% significa que de cada 100 € que Isabel tiene en la caja de ahorros, ésta le da 2,50 € al año. Por los 3.000 € le dará el 2,5%, esto es:

$$3000 \cdot \frac{2,5}{100} = 75$$

Le gana al año 75€. Por lo tanto, en tres años le producirá 3 veces esa cantidad, lo que es:

$$3000 \cdot \frac{2,5}{100} \cdot 3 = 225$$

Durante esos tres años el importe de interés que le produce es de 225€.

En general, si **c** es el **capital** depositado, **r** el tipo de interés (llamado también **rédito**) y **t** el número de años, el importe del interés **i** que produce viene dado por la fórmula:

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$$

EJERCICIO 13

Calcula el interés de 3.400 euros al 5 % durante 3 años.

EJERCICIO 14

¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25.000 € al 5% para que se convierta en 30.000 €?

2.1.3 El índice de precios al consumo.

El IPC es un índice que refleja cada mes la variación (aumento o, a veces, disminución) que sufren los precios de los productos que consumimos en España. Este índice se mide en tanto por ciento. Así, cuando en torno al día 10 de este mes los periódicos publicaron que el IPC había subido dos décimas (0,2%) significa que el nivel de precios ha aumentado ese porcentaje respecto del mes anterior.

Esto no quiere decir que cualquier producto de consumo (alimentos, gasolina, electricidad, vivienda) haya subido ese porcentaje. El IPC se obtiene como una media de la variación de los precios en el mes anterior.

El IPC es un índice muy importante, pues suele utilizarse como base para los incrementos de los sueldos de los trabajadores cada año.

EJERCICIO 15

Calcula el valor que obtenemos si 75 lo incrementamos en un 40%.

EJERCICIO 16

Calcula el valor resultante si 675 disminuye en un 60%

EJERCICIO 17

En un comercio debemos pagar 64€ por una camisa, a lo que debemos añadir el 21% de IVA, ¿cuánto tenemos que pagar en total?

EJERCICIO 18

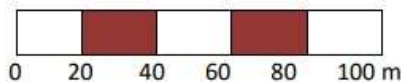
Tengo 2.700€ ahorrados y los invierto al 4'3% de interés simple anual, durante 6 años.
¿Cuánto dinero tendré al vencer el plazo de la inversión?

2.2. Escalas.

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados. La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Ejemplo: si una cierta escala se expresa de la forma 1 : 20000 significa que 1 cm del plano corresponde a 20000 cm = 200 m en la realidad.

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud



Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000.

EJERCICIO 19

La distancia real entre dos pueblos es 18.5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia.
¿A qué escala está dibujado?

EJERCICIO 20

¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?

Soluciones a los ejercicios propuestos

Apartado 1. Ejercicio 1

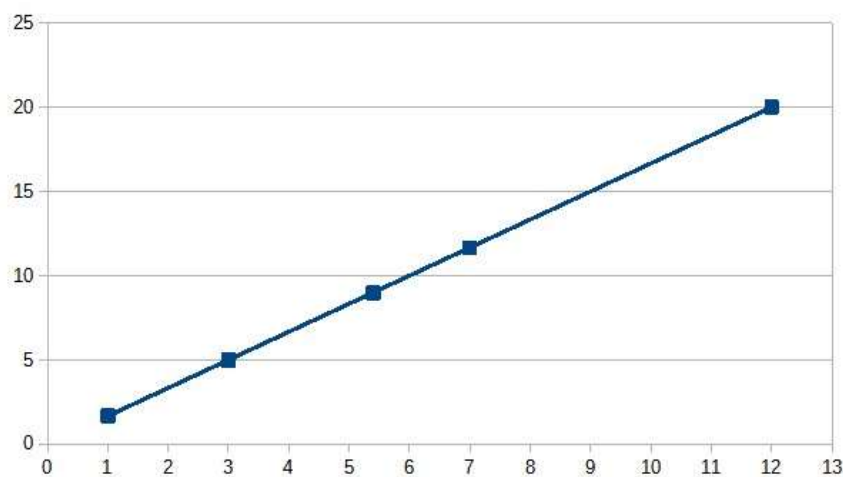
a) Razón de proporcionalidad: $5/3=1,67$

b) Es una relación directa, porque si compro más tela tendré que pagar más dinero.

c)

Metros de tela	3	7	5,4	12	1
Precio (€)	5	11.67	9	20	1.67

d)



Apartado 1. Ejercicio 2

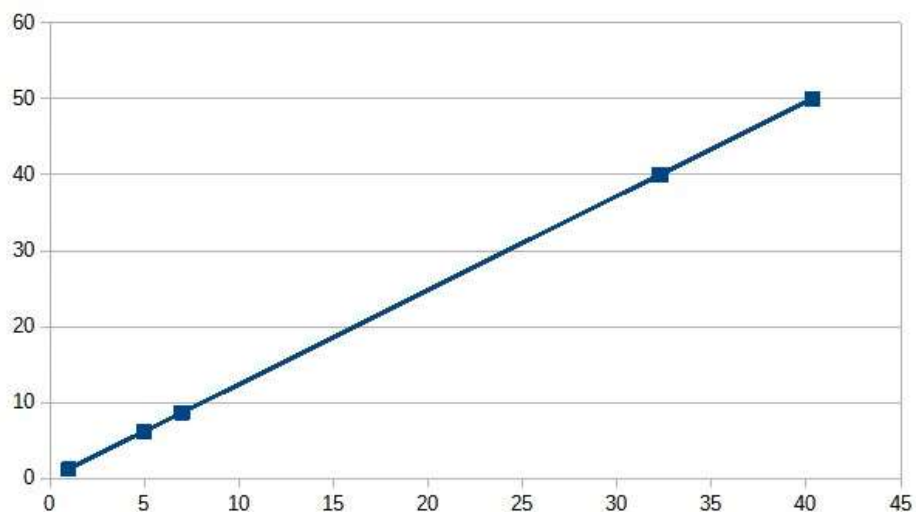
a) Razón de proporcionalidad: $6,20/5=1,24$

b) Es una relación directa, porque si compro más gasolina tendré que pagar más dinero.

c)

Litros de gasolina	1	32,3	5	7	40,3
Precio (€)	1,24	40	6,20	8,68	50

d)



Apartado 2. Ejercicio 3

b) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{17}{500}$

c) $\frac{28}{5}$

d) $\frac{2}{5}$

e) $\frac{7}{1000}$

Apartado 2. Ejercicio 4

Convierte los siguientes fracciones a porcentajes.

a) 15%

b) 63,4%

c) 16,67%

d) 41,67%

e) 12%

Apartado 2. Ejercicio 5

La población de una ciudad es de 652.000 habitantes y el 35% de ellos vive en el distrito central. ¿Cuántos de ellos viven en este distrito?

Solución: 228200 habitantes

Apartado 2. Ejercicio 6

En Albacete el 6% de la población son inmigrantes y en nuestra ciudad viven 9900 inmigrantes ¿cual es la población de Albacete?

Solución: 165000 habitantes

Apartado 2. Ejercicio 7

Calcula el precio de los siguientes artículos antes del 15% de descuento.

a) Chaqueta 200€

b) Coche 15800€

c) Zapatos 80€

Solución: a) Chaqueta 235,30€ b) Coche 18588,20€ c) Zapatos 94,10€

Apartado 2. Ejercicio 8

El precio de un horno eléctrico antes de impuestos es de 560€ y después de aplicar los impuestos es de 672€, ¿qué porcentaje corresponde a los impuestos?

Solución: 20%

Apartado 2. Ejercicio 9

Si una bicicleta antes de las rebajas costaba 1.400€ y luego 1.275€, ¿Qué porcentaje de descuento nos han hecho?

Solución: 9%

Apartado 3. Ejercicio 10

Dos bombas tardan 5 días en vaciar una piscina.

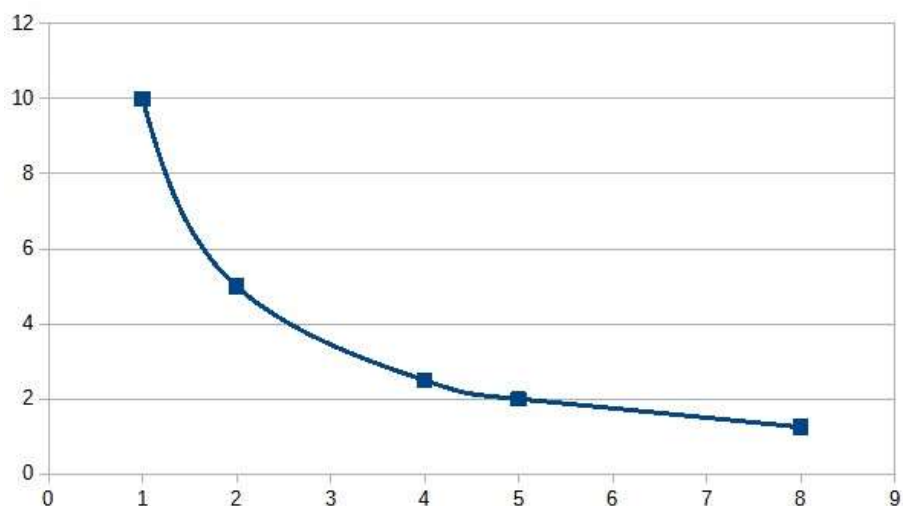
e) Relación inversa, porque si hay mas bombas sacando agua, tardarán menos tiempo en vaciar la piscina.

f) ¿Cuánto tiempo tardarán 5 bombas en vaciar la misma piscina? 2 días

g)

Numero de bombas	1	2	4	5	8
Dáis en vaciar la piscina	10	5	2,5	2	1,25

h)



Apartado4 . Ejercicio 11

Cuánto tendremos que pagar con IVA incluido del 21%, por un coche cuyo precio sin IVA es de 20.500€

Solución: 24805€

Apartado4 . Ejercicio 12

En unos conocidos almacenes de electrodomésticos nos ofrecen un jueves sin IVA, si el precio de un lavavajillas es de 968€ sin ese descuento, ¿cuánto nos costaría sin el IVA?

Solución: 800€

Apartado4 . Ejercicio 13

Calcula el interés de 3.400 euros al 5 % durante 3 años

Solución: 510 euros

Apartado4 . Ejercicio 14

¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25.000 € al 5% para que se convierta en 30.000 €?

Solución: Lo que ha rentado debe ser la diferencia: $30.000 - 25.000 = 5.000$ €, por lo que la solución, aplicando la fórmula es 4 años.

Apartado4 . Ejercicio 15

Calcula el valor que obtenemos si 75 lo incrementamos en un 40%.

Solución: 105

Apartado4 . Ejercicio 16

Calcula el valor resultante si 675 disminuye en un 60%

Solución: 270

Apartado4 . Ejercicio 17

En un comercio debemos pagar 64€ por una camisa, a lo que debemos añadir el 21% de IVA, ¿cuánto tenemos que pagar en total?

Solución: 77,44

Apartado4 . Ejercicio 18

Tengo 2.700€ ahorrados y los invierto al 4'3% de interés simple anual, durante 6 años.
¿Cuánto dinero tendré al vencer el plazo de la inversión?

Solución: 3396,6

Apartado4 . Ejercicio 19

La distancia real entre dos pueblos es 18.5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

Solución: 1:185000

Apartado4 . Ejercicio 20

¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?

Solución: 36 metros