

**Ámbito Científico y Tecnológico.**  
Módulo Tres. Bloque 9. Tema 7

# **Las formas y las medidas que nos rodean**

---

## Bloque 9. Tema 7

# Las formas y las medidas que nos rodean

### INDICE

#### 1. Repaso a las figuras planas elementales

#### 2. Poliedros y cuerpos de revolución

##### 2.1. Poliedros

##### 2.1.1. Poliedros regulares

##### 2.1.2. Prisma

##### 2.1.3. Pirámides

##### 2.2. Cuerpos redondos

##### 2.2.1. El cilindro

##### 2.2.2. El cono

##### 2.2.3. Esfera

##### 2.3. El área y el volumen

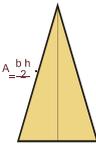
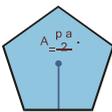
### Actividades

#### 1. Repaso a las figuras planas elementales

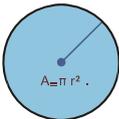
Antes de meternos en el estudio de los cuerpos geométricos elementales recordemos algunas de las figuras planas que vamos a necesitar, así como sus elementos, perímetro y área.

Recordamos que el perímetro es la suma de la longitud de los bordes de una figura geométrica y el área es el trozo de plano que queda encerrado por el borde de una figura geométrica.

<b>Figura geométrica</b>	<b>Definición</b>	<b>Cálculos</b>	<b>Vida cotidiana</b>
<b>Triángulo</b>	Figura geométrica	$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} / 2$	

	<p>que se obtiene al cortarse tres rectas mutuamente formando tres ángulos.</p>		<p><i>emergencia</i></p>
<p><b>Cuadrado</b></p> 	<p>Figura plana cerrada formada por cuatro líneas rectas iguales que forman otros tantos ángulos rectos.</p>	<p><math>\text{Área} = \text{lado} \cdot \text{lado} = l^2</math></p>	 <p><i>Tablero de ajedrez</i></p>
<p><b>Rectángulo</b></p> 	<p>Paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos y los lados contiguos desiguales.</p>	<p><math>\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}</math></p>	 <p><i>Baldosas rectangulares</i></p>
<p><b>Polígono regular</b></p> 	<p>Polígono en el que todos los lados tiene la misma longitud y todos los ángulos interiores son de la misma medida.</p>	<p><math>\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}</math></p>	 <p><i>Tuerca</i></p>
<p><b>Circunferencia</b></p> 	<p>Curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, que se llama centro.</p>	<p><math>\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot \text{radio} = 2 \cdot \pi \cdot r</math></p>	 <p><i>Rosetón del monasterio de Armenteira,</i></p>
<p><b>Círculo</b></p>	<p>Área o superficie</p>	<p><math>\text{Área} = \pi \cdot \text{radio}^2 = \pi \cdot r^2</math></p>	

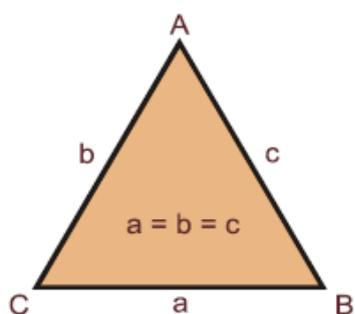


	<p>plana contenida dentro de la circunferencia.</p>		
---	---	--	--

Para terminar este apartado repasemos algunos conceptos relacionados con los triángulos.

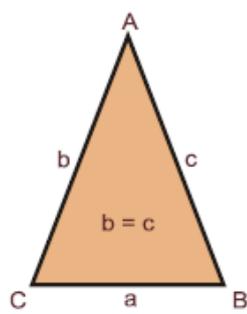
A la hora de clasificar los triángulos lo podemos hacer de distintas maneras:

- Por sus lados:
  - **Equilátero:** tiene la longitud de los tres lados igual.
  - **Isósceles:** tiene la longitud de dos lados iguales y una desigual.
  - **Escaleno:** tiene los tres lados de distinta longitud.



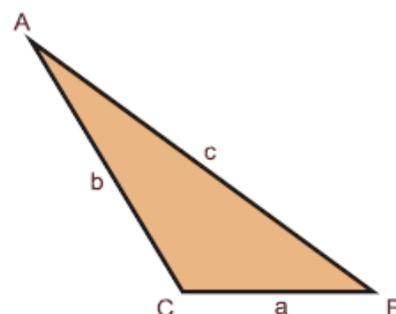
*Triángulo equilátero*

*Triángulo equilátero*



*Triángulo isósceles*

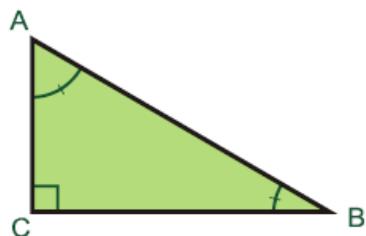
*Triángulo isósceles*



*Triángulo escaleno*

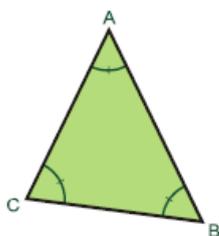
*Triángulo escaleno*

- Por sus ángulos:
  - **Rectángulo:** Tiene un ángulo recto
  - **Acutángulo:** Todos sus ángulos miden menos de noventa grados.
  - **Obtusángulo:** Tiene un ángulo de más de noventa grados



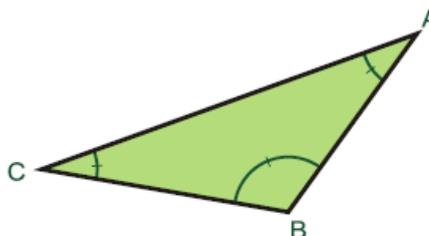
Triángulo Rectángulo

$$C = 90^\circ$$



Triángulo Acutángulo

$$A < 90^\circ; B < 90^\circ; C < 90^\circ$$

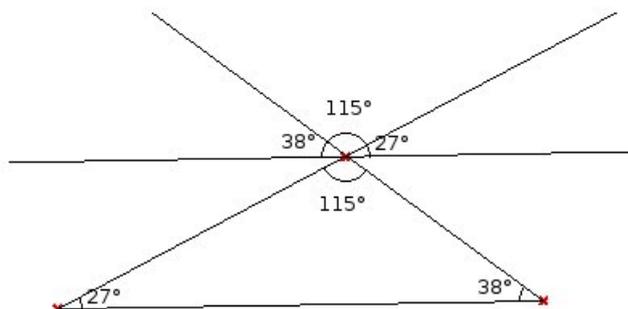


Triángulo Obtusángulo

$$B > 90^\circ$$

**Otros resultados interesantes sobre triángulos son los siguientes:**

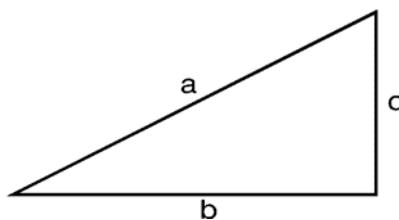
- ✓ La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es siempre de  $180^\circ$ , en la imagen siguiente vemos una demostración práctica de por qué ocurre esto:



✓ **Teorema de Pitágoras:**

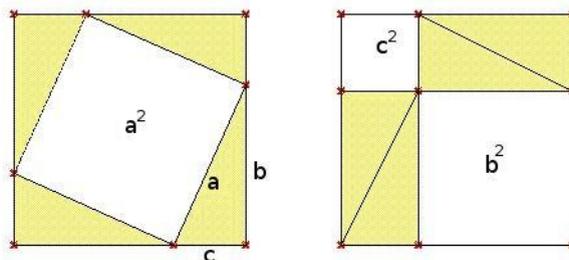
Dado un triángulo rectángulo se cumple que:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto1}^2 + \text{cateto2}^2$$

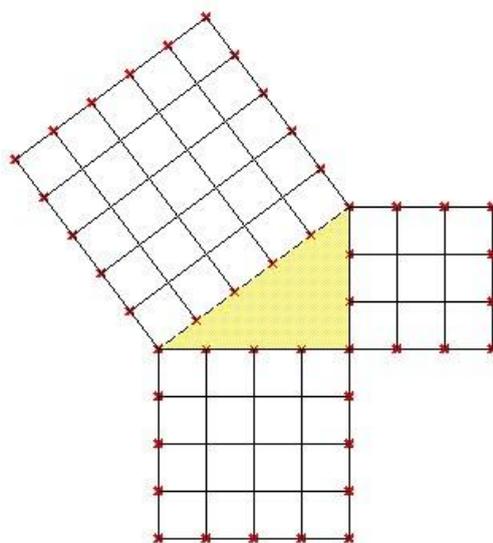


$$a^2 = b^2 + c^2$$

En la imagen siguiente podemos ver una demostración gráfica del teorema de Pitágoras:



Y otra imagen más con una demostración para el caso particular en el que los catetos del triángulo rectángulo miden 3 y 4 y la hipotenusa 5:



## 2. Poliedros y cuerpos de revolución

### 2.1. Poliedros

Cuando estamos andando por la calle continuamente estamos viendo figuras geométricas.



*Torres Petronas,  
Kuala Lumpur,  
Malasia*



*Torres Kio, Madrid, España*



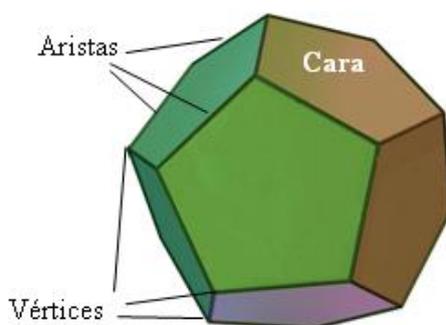
*Poliedro de la  
Armonía Leonardo  
Davinci*

Unas de las figuras que normalmente nos encontramos son los poliedros, estos son cuerpos geométricos que se forman a partir de polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos,...)

Los poliedros tienen elementos comunes, algunos de los cuales son:

- Cara: cada uno de los polígonos que forman o limitan un poliedro.
- Arista: segmento formado por la intersección de dos caras de un poliedro.
- Vértice: punto de intersección de dos o más aristas de un poliedro.

En la siguiente imagen podemos ver estos elementos sobre un poliedro regular formado por doce caras pentagonales, un dodecaedro.

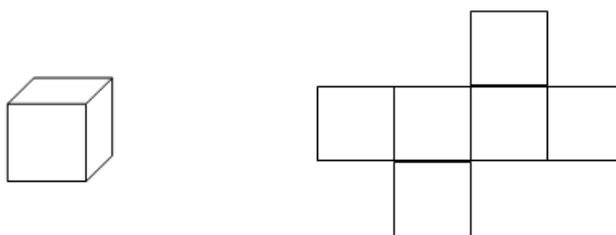


A parte de los elementos que aparecen en el dibujo están los vértices que son los puntos donde se cortan las aristas.

Los elementos de un poliedro convexo cumplen una propiedad curiosa que relaciona el número de caras, el de vértices y el de aristas. Es conocido como la fórmula de Euler y dice que:

***“El número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos, es decir:  $C + V = A + 2$ ”.***

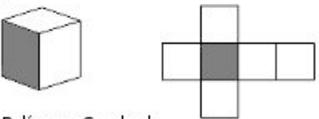
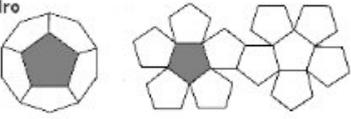
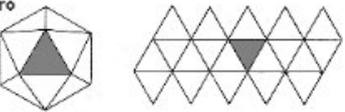
Un punto de vista especial, con respecto a un poliedro se obtiene al realizar el denominado desarrollo plano del mismo, que consiste en dibujar sobre un papel una figura que permita construir el poliedro mediante operaciones de pligado. Por ejemplo, aquí mostramos un desarrollo plano para un cubo, cuerpo geométrico formado por seis caras cuadradas:



### 2.1.1. Poliedros regulares

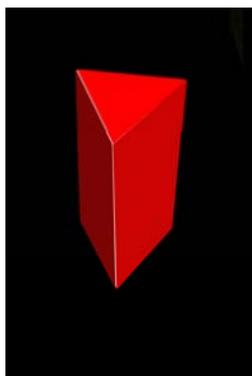
Dentro de todos los poliedros que existen hay unos pocos, concretamente cinco, que se les conoce como poliedros regulares o sólidos platónicos.

Estos poliedros tienen una propiedad especial y es que todas sus caras están formadas por polígonos regulares iguales. Debido a esta propiedad sólo cinco son los cuerpos geométricos que la cumplen: el tetraedro, el cubo o exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. En la imagen siguiente podemos observar estas figuras junto a su desarrollo plano:

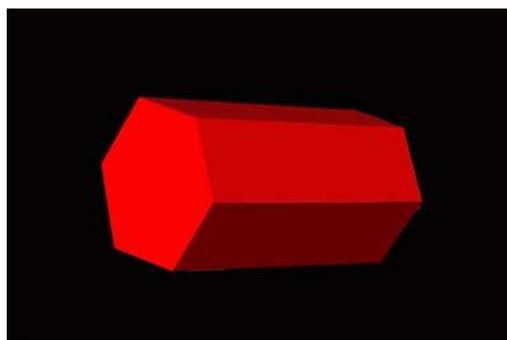
<p><b>Tetraedro</b></p>  <p>Polígono: Triángulo equilátero Caras: 4 Vértices: 4 Aristas: 6</p>	<p><b>Hexaedro</b></p>  <p>Polígono: Cuadrado Caras: 6 Vértices: 8 Aristas: 12</p>
<p><b>Octaedro</b></p>  <p>Polígono: Triángulo equilátero Caras: 8 Vértices: 6 Aristas: 12</p>	<p><b>Dodecaedro</b></p>  <p>Polígono: Pentágono regular Caras: 12 Vértices: 20 Aristas: 30</p>
<p><b>Icosaedro</b></p>  <p>Polígono: Triángulo equilátero Caras: 20 Vértices: 12 Aristas: 30</p>	

## 2.1.2. Prisma

Otro tipo de poliedros son los prismas, estos tienen las características especiales de que sus bases son polígonos regulares iguales y las caras laterales son rectángulos. El nombre de los prismas depende del polígono regular de la base:

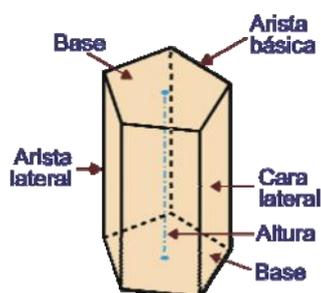


*Prisma Triangular*



*Prisma Hexagonal*

Algunos de los elementos de un prisma son los que aparecen en el siguiente dibujo:

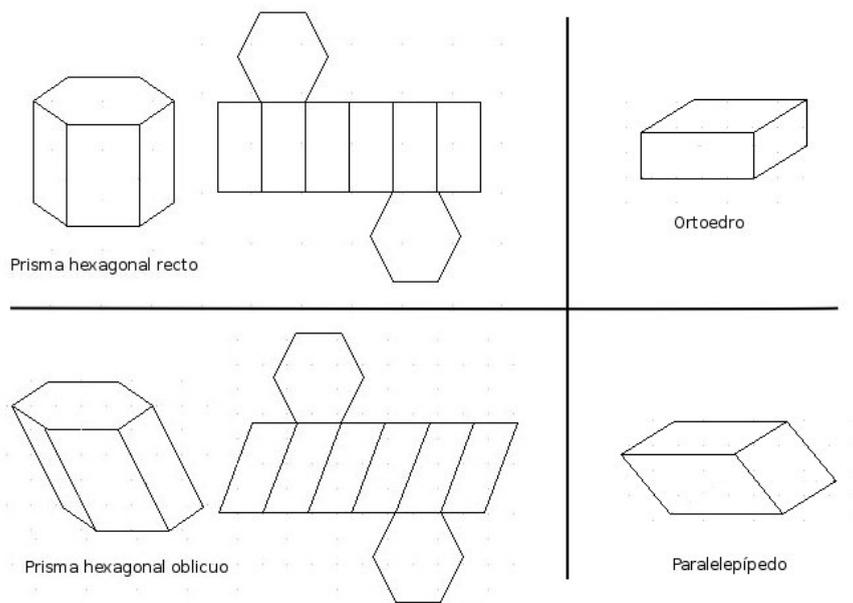


Otro elemento de los prismas son las diagonales que son segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Hay diferentes tipos de prismas, en función de sus características podemos hablar de:

- Prismas regulares: aquellos cuyas bases son polígonos regulares. En función del polígono de las bases, los prismas pueden ser de base triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.
- Prismas irregulares: aquellos cuyas bases son polígonos irregulares.
- Prismas rectos: aquellos cuyas caras laterales son cuadrados o rectángulos.
- Prismas oblicuos: aquellos cuyas caras laterales son romboides o rombos.

- Paralelepípedos: prismas cuyas bases son paralelogramos.
- Ortoedros: prisma que tiene todas sus caras rectangulares.

En la imagen siguiente vemos algunos ejemplos de prismas:



### 2.1.3. Pirámides

Siguiendo el análisis de los distintos poliedros llegamos al último que vamos a estudiar a fondo, estos son las pirámides:



*Esfinge y pirámide de Keops, Giza, Egipto*

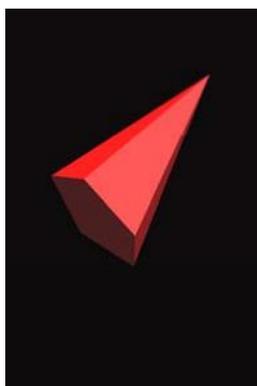


*Pirámides de Giza, Egipto*

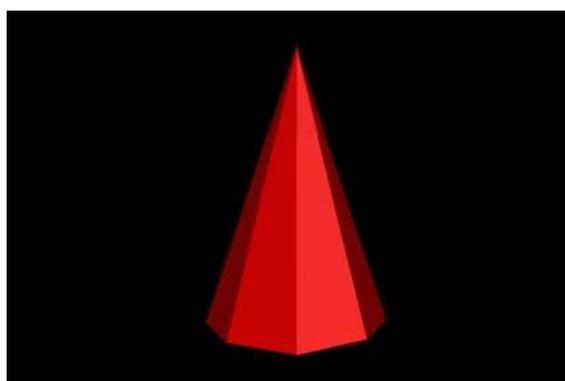
Como se ve, este poliedro es conocido desde hace mucho tiempo.

Las pirámides están formadas por un cara (la base) que es un polígono regular y caras laterales que son triángulos que se unen en un vértice.

A la hora de llamar a las pirámides el nombre varía dependiendo del polígono regular que tienen por base.

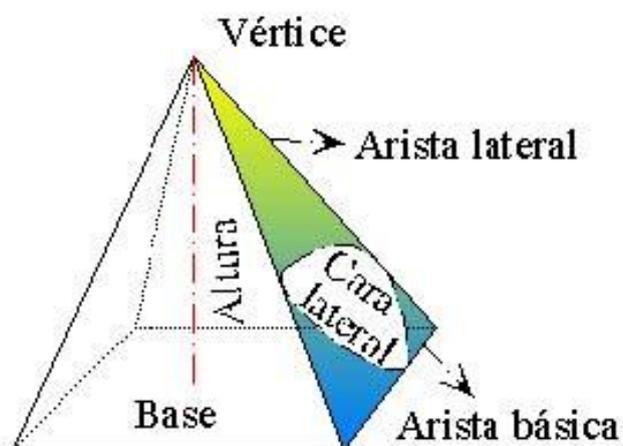


*Pirámide Pentagonal*



*Pirámide octogonal*

### *Elementos de las pirámides*



## 2.2. Cuerpos redondos

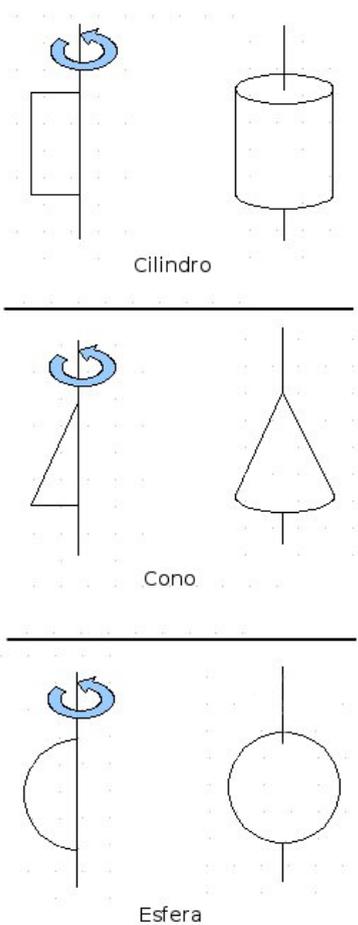
Los cuerpos geométricos que hemos estudiado por ahora tiene todas sus caras planas, pero también hay los que las tienen curvas. Estos son los cuerpos redondos. Nos vamos a centrar sólo en el estudio de tres de ellos, son cuerpos que se denominan de revolución, ya que se obtienen cuando hacemos girar una figura geométrica plana.

Si partimos de un rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus lados obtenemos un cilindro.

Si partimos de un triángulo rectángulo y lo hacemos girar sobre uno de sus catetos obtenemos un cono.

Si partimos de una media circunferencia y la hacemos girar sobre el diámetro obtenemos una esfera.

La imagen siguiente ilustra la construcción de los cuerpos de la revolución citados:



## 2.2.1. El cilindro

### *Cilindros en el arte*

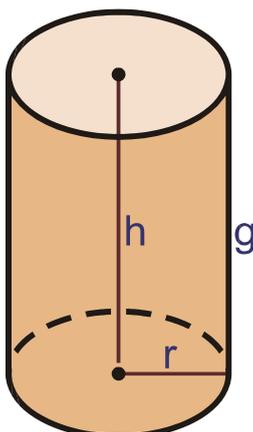


*Columna*



*Torre de Pisa (Cilindro oblicuo)*

Como hemos dicho antes se obtiene al hacer girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Los elementos de un cilindro son:



Donde  $h$  simboliza la altura del cilindro,  $g$  la generatriz y  $r$  el radio de la base.

## 2.2.2. El cono

### *Espacio y estética*



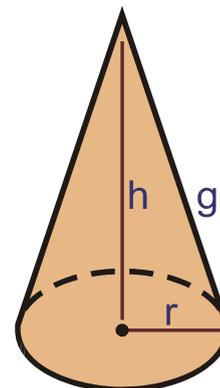
*Plaza de Europa de la Expo92*



*Silos de Santa Mónica, hacienda de San Juan de Trancoso, México*

Al igual que el cilindro es un cuerpo de revolución, obtenido, como ya hemos dicho, al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

Los elementos de un cono son:



Donde  $h$  simboliza la altura del cilindro,  $g$  la generatriz y  $r$  el radio de la base.

### 2.2.3. Esfera



Centro Cultural de Tijuana, México



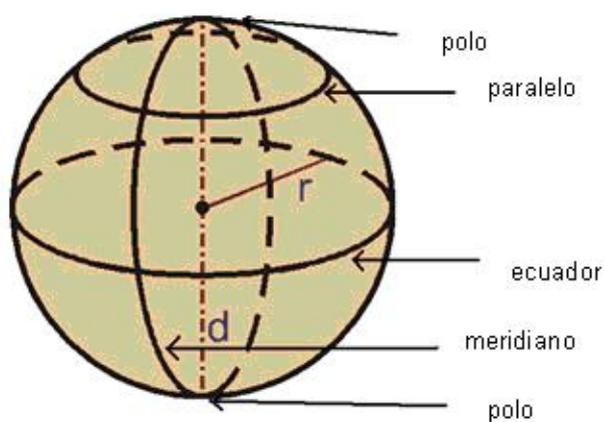
Embarcadero. Toronto. Canada



Vista desde el espacio de la tierra y la luna

Por último, la esfera, cuerpo de revolución que se obtiene al girar una semicircunferencia. Se usa como modelo ya sea para arquitectura, moda, deportes, balones,...; además es una de las formas que más se repite en la naturaleza: los planetas, distintas frutas, semillas,...

Sus elementos son:



Y la  $r$  simboliza el radio y la  $d$  el diámetro

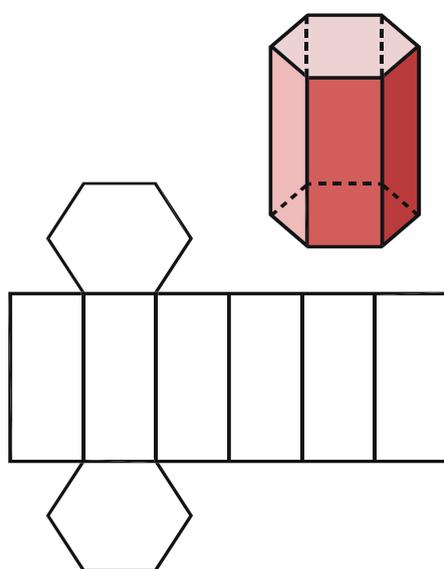
## 2.3. El área y el volumen

Hay veces que necesitamos saber la superficie de alguno de los cuerpos que hemos estudiado así como la capacidad interior que tiene

Supongamos que queremos poner un depósito de agua de forma cilíndrica con la mayor capacidad posible, para ello necesitamos calcular el área de un cilindro y el volumen del mismo.

Para calcular el área de los cuerpos geométricos lo primero que tenemos que visualizar es el desarrollo de cada uno. Veamos un ejemplo:

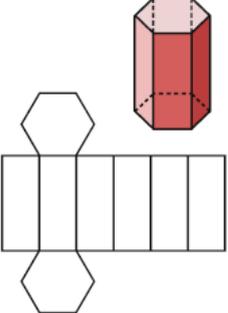
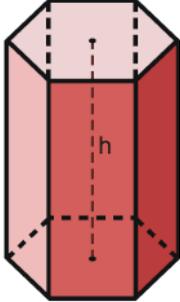
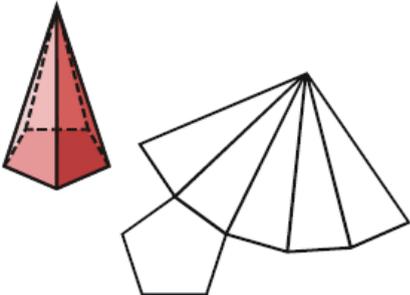
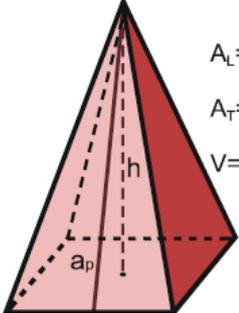
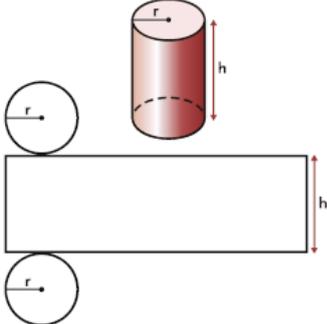
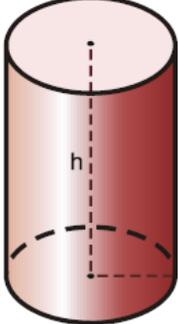
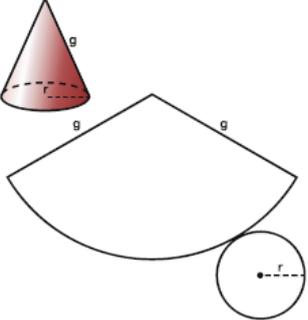
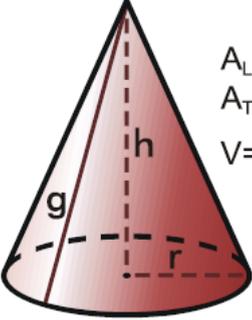
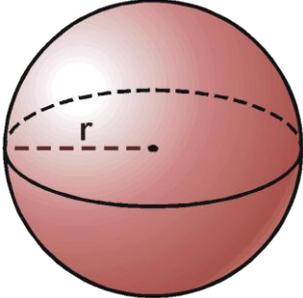
Si tenemos un prisma hexagonal obtenemos seis rectángulos y dos hexágonos:



*Desarrollo de un prisma hexagonal*

En la siguiente tabla se encuentran el desarrollo y las fórmulas del área y el volumen de los distintos cuerpos:

Por último recordar que muchas formaciones geométricas son composiciones de los cuerpos geométricos que se han estudiado en este tema.

<b>Cuerpo geométrico</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>Área y volumen</b>
<b>Prisma recto</b>		 $A_L = p \cdot h$ $A_T = p \cdot h + 2A_B$ $V = A_B \cdot h$
<b>Pirámide recta</b>		 $A_L = \frac{p \cdot a_p}{2}$ $A_T = \frac{p \cdot a_p + A_B}{2}$ $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$
<b>Cilindro recto</b>		 $A_L = 2\pi r \cdot h$ $A_T = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ $V = \pi r^2 \cdot h$
<b>Cono recto</b>		 $A_L = \pi r \cdot g$ $A_T = \pi r \cdot g + \pi r^2$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
<b>Esfera</b>		 $A = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

## Actividades Tema 7

**Nota:** para la realización de algunas de las preguntas será necesario que uses el teorema de Pitágoras. En las siguientes páginas encontraras como aplicar el teorema de Pitágoras para en Pirámides y en Conos:

[http://www.kalipedia.com/matematicas-aritmetica/tema/area-volumen-piramide.html?x1=20070926klpmatgeo\\_309.Kes&x=20070926klpmatgeo\\_311.Kes](http://www.kalipedia.com/matematicas-aritmetica/tema/area-volumen-piramide.html?x1=20070926klpmatgeo_309.Kes&x=20070926klpmatgeo_311.Kes)

[http://www.geoka.net/poliedros/piramide\\_geometria.html](http://www.geoka.net/poliedros/piramide_geometria.html)

<http://www.vitutor.net/2/2/31.html>

Escribe los números decimales con la coma abajo y si en los resultados escribe, si los hay, los dos primeros decimales solamente.

1.- ¿Cuál es el área y el volumen de prisma triangular con base un triángulo isósceles de lados iguales 5 cm y el otro 6 cm. y cuya altura del prisma es 7 cm? **Área:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

2.- ¿Cuál es el área y el volumen de un prisma cuadrangular cuya arista de base mide 4 cm. y de altura 7 cm.?

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

3.- ¿Cuál es el área y el volumen de un prisma rectangular cuyas dimensiones de base son 3 y 4 cm. y la altura es 10 cm.?

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

4.- ¿Cuál es el área y el volumen una pirámide cuadrangular con longitud de arista de base 6 cm. y apotema de las caras 5 cm.? (la apotema de una pirámide es la altura de una de sus caras) **Área:**

\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ . **Volumen:**

\_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

5.- ¿Cuál es el área y el volumen de una pirámide cuadrangular con longitud de arista de base 6 cm. y de altura de la pirámide 4 cm.?

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

6.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 3 m. y radio: 1 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

7.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 2 m. y radio: 2 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

8.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 1 m. y radio: 3 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

9.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cilindro de altura 4 m. y radio: 3 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

10.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 5 m. y radio 3 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

11.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 10 m. y radio 6 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

12.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de generatriz 13 m. y radio 5 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

13.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de altura 12 m. y radio 9 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

**Área:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^2$ .

**Volumen:** \_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .

14.- ¿Cuál es el área y el volumen de un cono de altura 15 m. y radio 8 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

Área: \_\_\_\_\_m<sup>2</sup>.

Volumen: \_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.

15.- ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 2 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

Área: \_\_\_\_\_m<sup>2</sup>.

Volumen: \_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.

16.- ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 3 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

Área: \_\_\_\_\_m<sup>2</sup>.

Volumen: \_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.

17.- ¿Cuál es el área y el volumen de una esfera cuyo radio es 4 m.? Usa como aproximación del número  $\pi = 3,14$ .

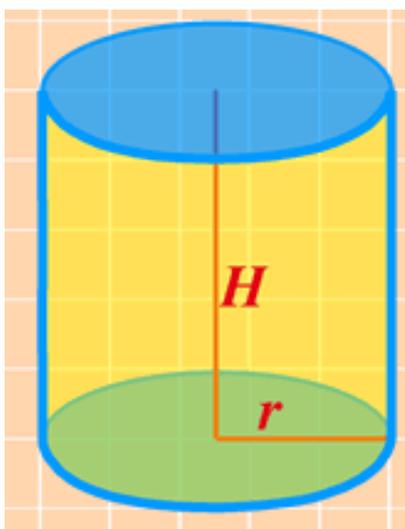
Área: \_\_\_\_\_m<sup>2</sup>.

Volumen: \_\_\_\_\_m<sup>3</sup>.

18.- Completa la siguiente tabla sobre los poliedros regulares:

POLIEDROS REGULARES				
Nombre	Nº de caras	Nº de vértices	Nº de Aristas	Forma del Polígono de sus caras

19. Dibuja con reglas, el desarrollo plano de un cilindro cuyo radio de la base es de 1 cm y altura 3 centímetros. Calcula el área de las caras y el volumen que cabe dentro del mismo.



20. Dibuja con reglas, el desarrollo plano de un hexaedro de base rectangular de lados 4 y 5 cm y altura 6 cm. Calcula el área de las caras y el volumen que cabe dentro de la misma.

