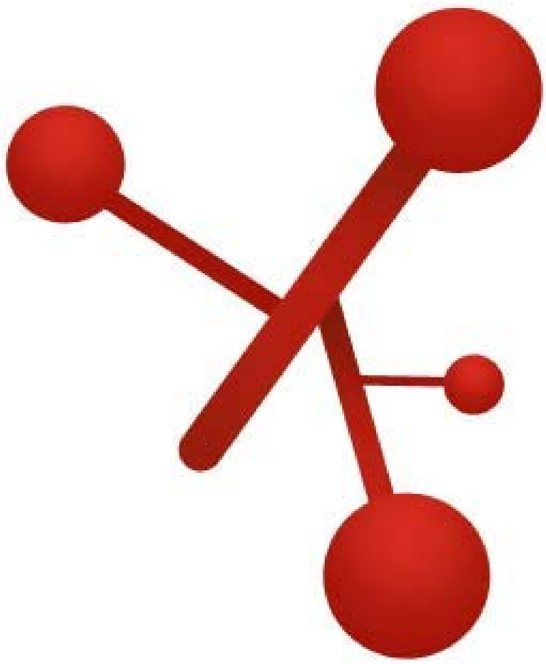


Ámbito Científico y Tecnológico.

Módulo Tres. Tema 1

Las cuentas de andar por casa

Tema 1

Las cuentas de andar por casa

ÍNDICE

1. Los distintos tipos de números

Antes de llegar a las cuentas que realizamos en nuestras casas en la vida diaria vamos a hacer un repaso por los diferentes tipos de números que nos podemos encontrar y cómo los representamos.

1.1. Los números naturales

El primer tipo de números del que tenemos que hablar son aquellos que nos permiten contar, estos son, los que nos permiten decir: dos manzanas, cinco libros, siete cartas,…

Los números naturales son aquellos que pensamos y nos vienen a la cabeza sin más estos son: positivos, sin decimales, sin fracciones…, es decir, **naturales**. Los números naturales fueron los primeros que manejó el ser humano. Éstos se representan con el símbolo **N** y son:

$$\mathbf{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,...,\ 15,\ 16,...,\ 66,\ 67,\ 68,...,\ 12345,\ 12346,...\}$$

En los números naturales siempre que se tenga un número existe su siguiente, que se obtiene del anterior sumándole uno.

A la hora de ordenar los números naturales estos siguen el orden lógico, el 0 es menor que 1, el 1 es menor que 2, el 3 es menor que 4,…, el 66 es menor que 67,…

Para decir que un número es menor que otro, en matemáticas usamos el símbolo <, y para decir que un número es mayor que otro, escribimos >. De esta forma la frase anterior quedaría de la siguiente forma:

$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < ... < 66 < 67 < ...$

Si lo escribimos de mayor a menor:

$... > 67 > 66 > ... > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$

¡¡OJO!!

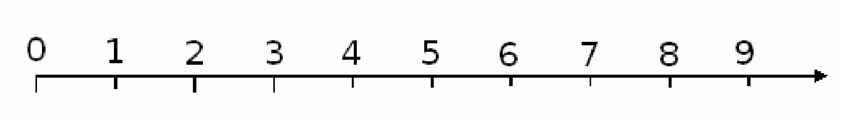
Para no confundirte con los signos “<” y “>” recuerda lo siguiente:

La **parte abierta** del ángulo debe “mirar” al **número mayor** y el **vértice** al número **menor**

nº menor **<** nº mayor

nº mayor **>** nº menor

La representación gráfica de los números naturales se hace sobre una semirrecta horizontal donde el extremo izquierdo es el 0. Desde aquí se divide la semirrecta en partes iguales, y en cada marca vamos situando los números ordenados de menor a mayor.



Representación gráfica de los números naturales

1.2. Los números enteros

¿Cuál es el resultado de la operación: $5-8$? ¿Es un número natural?

Como ya habréis contestado, la respuesta es -3, pero, ¿es este número un número natural? Efectivamente, NO. Los números naturales son del 0, 1,… y todos positivos, los negativos no son números naturales.

La necesidad de tener números negativos es lo que nos lleva a definir los **Números Enteros** que no son ni más ni menos que los números naturales y estos mismos con signo negativo, es decir:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-1234,-1233,\ldots,-78,-77,\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots,+77,+78,\ldots,+1233,+1234,\ldots\}$$

A los números enteros se les identifica con el símbolo **Z** .

Como primera consecuencia de lo que hemos escrito anteriormente es que:

Los números naturales son números enteros, pero no todos los números enteros son números naturales.

La gran diferencia entre los números naturales y los números enteros es que los **números enteros tienen opuesto**, mientras que los números naturales no.
Todo número entero tiene anterior y siguiente, esto es, dado un número entero siempre puedo escribir un número mayor y un número menor que él simplemente con sumarle o restarle uno.

El opuesto de un número entero es el mismo número pero cambiado de signo.

EJEMPLOS:

1. El opuesto de -5 es +5.
2. El opuesto de +8 es -8.
3. El opuesto de -17 es 17.
4. El opuesto de 4 es -4.
5. El opuesto de 0 es 0.

Para representar los números enteros seguimos los siguientes pasos:

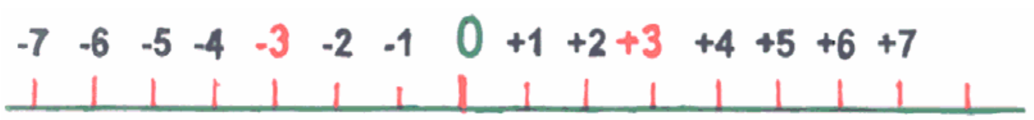
1. Trazamos una recta horizontal y situamos en ella el 0

0

El 0 divide a la recta en dos semirrectas.

2. Dividimos cada una de las dos semirrectas en partes iguales

3. Situamos los número enteros sobre las semirrectas: los enteros positivos a la derecha del cero, y los enteros negativos a la izquierda del cero:



Antes de continuar definimos lo que se llama **valor absoluto de un número**, que se representa escribiendo el número entre dos barras verticales $|-7|$, valor absoluto de -7).

El valor absoluto de un número entero es el número natural que se obtiene al quitarle el signo al número inicial, luego $|-7| = 7$.

EJEMPLOS:

a) $|+5| = 5$

b) $|-12| = 12$

c) $|+1| = 1$

d) $|-8| = 8$

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/enterosdesp/introduccionenteros.htm

1.3. Los números racionales

A pesar de que los números enteros mejoran y complementan a los números naturales, ¿el número $\frac{3}{4}$ es natural, entero,…? Lo cierto es que ni es natural, ni es entero, es un número racional.

Los números racionales nacen de la necesidad de dividir.

Los números racionales son aquellos que podemos expresar mediante una fracción con algunas condiciones especiales.

Una fracción es de la forma $\frac{a}{b}$, donde *a* recibe el nombre de numerador, y *b* denominador.

De esta forma, un número racional es una fracción donde:

1. *a* y *b* son números enteros.
2. *b* no puede ser 0.

A todos los números racionales se les designa con el símbolo **Q** .

Algunas consecuencias inmediatas de la definición de número racional es que:

1. Todo número natural es racional. **Ejemplo:** $2 = \frac{4}{2}$
2. Todo número entero es racional. **Ejemplo:** $-3 = \frac{-6}{2}$
3. Como recordarás, el inverso de un número es aquel que al multiplicarlo por el número da como resultado 1, es decir, dado un número racional $\frac{a}{b}$, es $\frac{b}{a}$, ya que: $\frac{a}{b} . \frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = 1$

Todos los números racionales, salvo el cero, tienen inverso. Esta es la característica más importante que diferencian a los racionales de los enteros, ya que en los números enteros, solamente el 1 tiene inverso que es el mismo.

Dado un número racional $\frac{a}{b}$, su inverso es $\frac{b}{a}$.

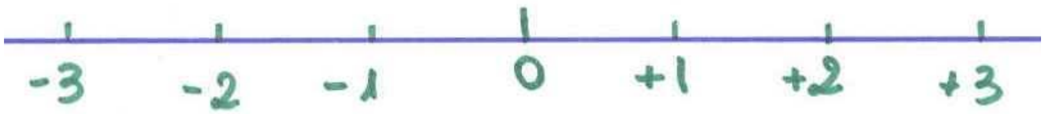
EJEMPLOS:

1. El inverso de $\frac{6}{7}$ es $\frac{7}{6}$.
2. El inverso de $\frac{-3}{5}$ es $\frac{5}{-3}$.

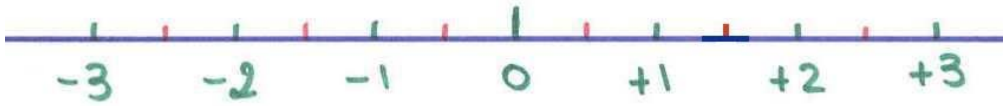
Para representar los números racionales hay que seguir los siguientes pasos, para ilustrarlo veamos un ejemplo:

Queremos representar el número racional: $\frac{3}{2}$

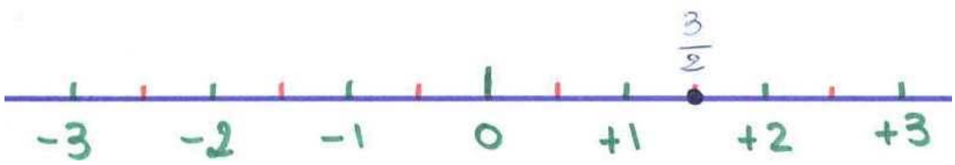
1. Dibujamos la recta numérica:



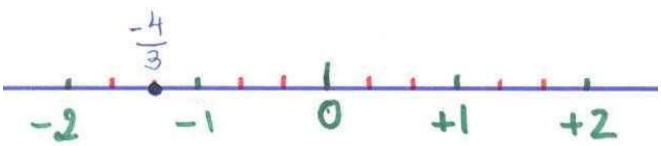
2. Dividimos cada **segmento unidad** en *b* partes iguales, en nuestro caso $b = 2$. (Un segmento unidad es el trozo de recta que hay comprendido entre dos números consecutivos de la recta numérica).



3. Contamos *a* partes, de en las que hemos dividido ahora la recta, desde el 0 y en el sentido de su signo, en nuestro caso $a = 3$, y como es positivo, contamos desde el 0 hacia la derecha. Luego:



Ejemplo: Representamos el



número $\frac{-4}{3}$

A la hora de saber cuando un número racional es mayor o menor que otro podemos utilizar métodos sencillos, como por ejemplo hacer la división y comparar los números decimales que se obtienen o representar ambos números en la recta numérica de modo que el que esté más a la izquierda es el menor.

1.4 Los números irracionales

Ya hemos visto los números naturales, enteros y racionales, pero aún queda un tipo de números, estos son los números irracionales.

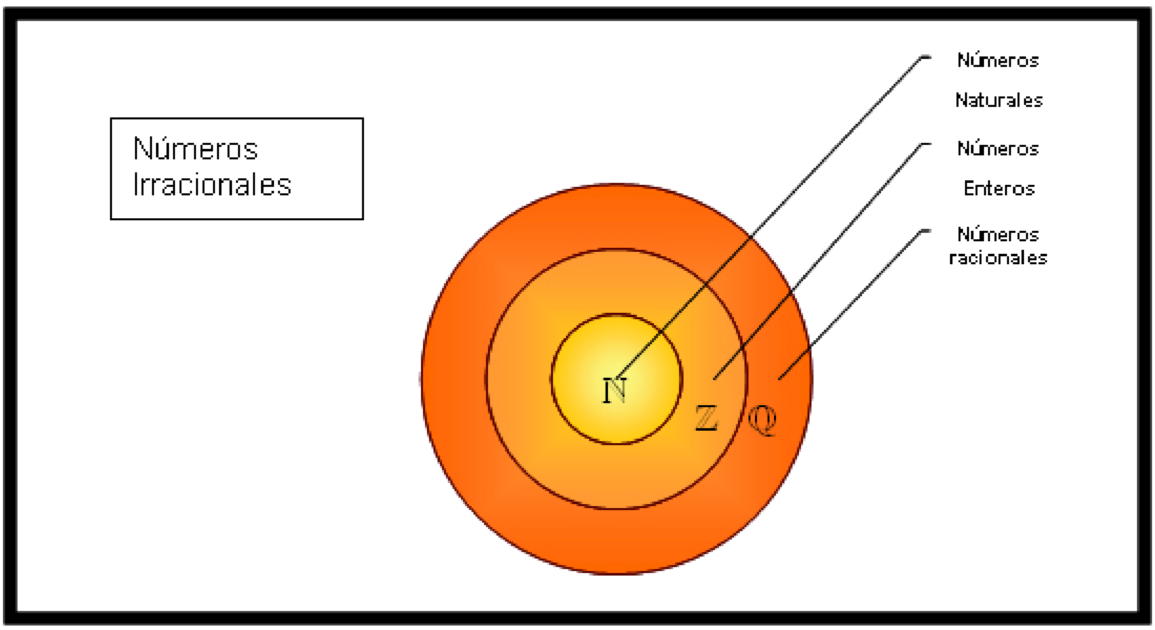
Estos números son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, algunos de estos números son: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...

Para saber si un número irracional es mayor o menor que otro se hace de forma aproximada, se calcula el número en la calculadora, se representa aproximadamente en la recta numérica y el que se quede más a la izquierda es el menor.

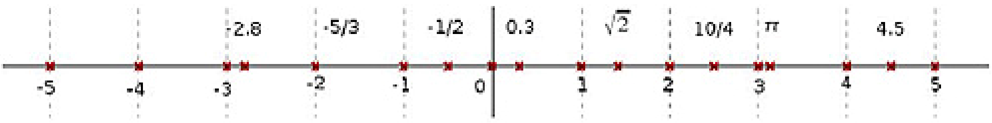
1.5. Los números reales

A lo largo de este tema hemos estudiado los números naturales, enteros, racionales e irracionales; a todos estos números juntos se les llama números reales.

NUMERO REALES



Los números reales se representan sobre la recta numérica que toma el nombre de los números que contiene y se denomina **recta real**. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real un punto de la recta. Por ejemplo:

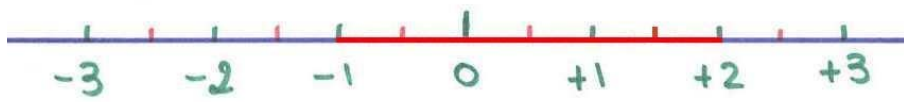


Intervalos

Una vez vista la recta real donde están representados todos los tipos de números que hemos estudiado, se llama intervalo determinado por dos números reales a todos los números que se pueden representar en la recta real entre ambos, es decir, a todos los números que puedo colocar en el segmento de recta real determinado por dos números reales.

EJEMPLO:

El intervalo entre -1 y 2 es, gráficamente, la zona coloreada de rojo en la recta real:



A los números que determinan el intervalo se les denomina extremos.

Dependiendo de si los extremos se incluyen en el intervalo o no la forma de escribirlo matemáticamente varía. Cuando los extremos pertenecen al intervalo se usan los símbolos [o], si los extremos no están dentro del intervalos se usan los símbolos (o). Los extremos, a la hora de escribir, se ponen de menor a mayor.

Una propiedad importante de los intervalos es que están formados por infinitos números reales.

Veamos algunos **ejemplos** para ilustrar lo anterior:

1. Intervalo $[-1, 2]$, es el que tenemos representado en el dibujo anterior. En este caso hemos considerado que tanto el -1 como el 2 están dentro del intervalo.
2. Intervalo $[-1, 2)$, igual que antes pero en este caso el 2 no esta en el intervalo, es decir, son todos los números comprendidos entre el -1 (inclusive) hasta el 2 (sin incluir).
3. Intervalo $(-1, 2]$, es el mismo que antes pero en este caso el número que no está dentro del intervalo es el -1.
4. Intervalo $(-1, 2)$, en este caso ninguno de los dos extremos están incluidos en el intervalo, es decir, son todos los números desde el -1 al 2 pero sin incluir ninguno de ellos.

2. Potencias

2.1. Potencia de base racional y exponente natural

<u>Propiedades</u>:

1.- Cómo se eleva una fracción a una potencia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} \quad c \text{ veces.}$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{9}\right)^4 = \frac{2^4}{9^4}$

Para elevar una fracción a una potencia, **se elevan** a dicha potencia el **numerador** y el **denominador** de la fracción.

2.- Cómo se multiplican potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^d = \left(\frac{a}{b}\right)^{c+d}$$

Ejemplos: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2+4} = \left(\frac{-2}{3}\right)^6$$

Para **multiplicar** potencias de la misma base, se deja la misma base y se **suman** los exponentes.

3.- Cómo se dividen potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c : \left(\frac{a}{b}\right)^d = \left(\frac{a}{b}\right)^{c-d}$$

Ejemplos: $\left(\frac{3}{8}\right)^8 : \left(\frac{3}{8}\right)^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{8-5} = \left(\frac{3}{8}\right)^3$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^7 : \left(\frac{-3}{5}\right)^3 = \left(\frac{-3}{5}\right)^{7-3} = \left(\frac{-3}{5}\right)^4$$

Para **dividir** potencias de la misma base, se deja la misma base y se **restan** los exponentes.

4.- Cómo se eleva una potencia a otra potencia

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Ejemplo: $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2 \cdot 5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$

Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

5.- Cómo se eleva un producto a una potencia

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3$

Para **elevar un producto** a una potencia, **se eleva cada factor** a dicha potencia.

6.- Cómo elevar un número racional a 0 y a 1

Cualquier número racional elevado a 0 es igual a 1
Cualquier número racional elevado a 1 es igual al mismo número

2.2. Potencia de exponente entero

Es decir, si a es un número racional distinto de cero

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}} \quad \frac{1}{a^n}$$

Una potencia de exponente negativo es igual a 1 dividido por la misma potencia con exponente positivo.

Cuando la base sea una fracción: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3^2}{5^2}}=\frac{5^2}{3^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

En general, $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Para elevar una fracción a un exponente negativo se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente

2.2.1. Operaciones con potencias de exponente entero

Las operaciones con potencias de exponente entero cumplen las mismas propiedades que hemos visto para las potencias de exponente natural. Por tanto, las operaciones, se realizan de la misma forma aunque, eso sí, habrá que tener en cuenta las reglas de los signos al operar con los exponentes.

A continuación veremos algunos ejemplos:

Multiplicación de potencias de la misma base

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{5}\right)^{(-3)+(-4)}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^{7}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{-2}{3}\right)^{7+(-3)}=\left(\frac{-2}{3}\right)^{4}$$

División de potencias de la misma base

$$6^{-2}:6^{-5}=6^{-2-(-5)}=6^{-2+5}=6^{3}$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^{2}:\left(\frac{-3}{5}\right)^{6}=\left(\frac{-3}{5}\right)^{2-6}=\left(\frac{-3}{5}\right)^{-4}$$

Potencia de una potencia

$$\left(2^{-3}\right)^{4}=2^{-3\cdot 4}=2^{-12}$$

$$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}\right]^{-3}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-4\cdot(-3)}=\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$$

Potencia de un producto $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$$

2.2.2. Un caso especial: las potencias de base 10

Las potencias de base 10 suponen un caso muy especial dentro del conjunto de las potencias. Son especiales porque su cálculo se hace tremendamente fácil. Veamos, por ejemplo:

$10^{1} = 10$

$10^{2} = 100$

$10^{3} = 1\ 000$

$10^{6} = 1\ 000\ 000$

$10^{9} = 1\ 000\ 000\ 000$

Cualquier potencia de base 10 y exponente positivo es igual a 1 seguido de tantos ceros como indique el exponente.

¿Y si el exponente es negativo?

$$10^{-3} = 0,001$$

$10^{-1} = 0,1$

$10^{-2} = 0,01$

$10^{-3} = 0,001$

$10^{-6} = 0,000001$

$10^{-9} = 0,000000001$

$10^{-12} = 0,000000000001$

$10^{-15} = 0,000000000000001$

2.3. Números muy grandes y muy pequeños. La notación científica

A veces tenemos que expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas. En esos casos, es cuando nos resulta especialmente útil lo que acabamos de ver. Por ejemplo, ¿sabes cuántas células puede llegar a tener el cuerpo humano? Pues unos cincuenta billones, es decir, 50000000000000.

$$50000000000000 = 5\,.10000000000000 = 5\,.10^{13} \text{ células}$$

Esto último es un ejemplo de lo que llamamos **notación científica**. Escribir un número en notación científica es expresarlo como el producto de un número (entero o decimal) entre 1 y 10, y una potencia de 10.

Veamos algunos ejemplos más:

a) $529000000 = 5{,}29 \cdot 10^{8}$

b) $590000000000 = 5{,}9 \cdot 10^{11}$

c) $0{,}000987 = 9{,}87 \cdot 10^{-4}$

d) $0{,}000000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$

Volviendo a las células, sabemos que su tamaño es muy pequeño. Por poner un ejemplo, el diámetro de una célula de la hoja del peral es de 0,0000074 m, que escrito en notación científica sería $7{,}4 \cdot 10^{-6}$ m.

Por ejemplo, la distancia que nos separa de la nebulosa de Andrómeda, por ejemplo, es aproximadamente igual a 95000000000000000000 km.

Para expresar este número en notación científica, basta con:

1. Escribir las cifras significativas (95), colocando una coma a la derecha de la primera (9,5).
2. Contar las cifras que hay a la derecha del 9 (19 en total), lo que nos dará el exponente al que hay que elevar el 10.

Por lo tanto, en este ejemplo:

$$9500000000000000000 = 9{,}5 \cdot 10^{19} \text{ km}$$

Para escribir en notación científica números muy pequeños, actuamos de forma parecida, sólo que en este caso el exponente del 10 será negativo.
Como ejemplo, tomemos el número 0,000987. Para escribirlo en notación científica haremos lo siguiente:

1. Escribir las cifras significativas (987), colocando una coma a la derecha de la primera (9,87).
2. Contar el lugar que ocupa la primera cifra significativa a partir de la coma.

Esto nos dará el valor absoluto del exponente (negativo).

Por lo tanto tendremos:

$$0{,}000987 = 9{,}87 \,.\, 10^{-4}$$

2.3.1. ¿Cómo escribir brevemente un número muy grande cuyas cifras no sean ceros?

Puede parecer que para expresar un número con notación científica, es necesario que algunas de sus cifras sean ceros y sin embargo lo más habitual es que números muy grandes tengan muchas cifras distintas de cero. ¿Qué haremos? Utilizaremos las aproximaciones de números. Con números muy grandes o muy pequeños es frecuente hacer **aproximaciones**, despreciando cifras que no son significativas y sustituyéndolas por ceros.

Observa el siguiente ejemplo:

La distancia entre el Sol y la Tierra es 149.597.870.691 metros o 149.597.870,691 kilómetros. Tratándose de millones de kilómetros, cien mil kilómetros más o menos son insignificantes por lo que podemos **redondear o aproximar** este número y sustituir algunas cifras por ceros. Podríamos decir que la distancia máxima del Sol a la Tierra es **aproximadamente** 149.600.000 kilómetros (o 149.600.000.000 metros) y si lo queremos expresar con notación científica pondremos $1{,}496 \cdot 10^{8}$ Km ($1{,}496 \cdot 10^{11}$ m)

Para expresar un número con **notación científica** debemos usar una sola cifra para la parte entera y el resto las pondremos como parte decimal. No es conveniente usar más de 3 cifras decimales. El resto de las cifras decimales se redondean o sustituyen por ceros.

Ejemplos:

1- Expresa con notación científica los siguientes números:

$237000 = 2,37 \cdot 10^5$

$128500000000000 = 1,285 \cdot 10^{14}$

$860000000000000000 = 8,6 \cdot 10^{17}$

2- Expresa con notación decimal:

$3,24 \cdot 10^5 = 3,24 \cdot 100000 = 3240000$

$4,7 \cdot 10^8 = 4,7 \cdot 100000000 = 470.000.000$

$5,859 \cdot 10^6 = 5,859 \cdot 1000.000 = 5.859.000$

3- Expresa con notación científica el número de habitantes que había en el mundo en el año 2005:

En el 2005 se contabilizaron 6.525.170.264 habitantes que es aproximadamente 6.525.000.000 es decir $6,525 \cdot 10^9$ habitantes. En este caso se comprende mejor si lo expresamos diciendo que había unos seis mil quinientos millones de habitantes.

2.4. Operaciones con números expresados en notación científica

2.4.1. Suma y resta

Debemos distinguir dos casos:

a. **Las potencias de 10 son iguales**

En este caso, sumamos o restamos los números que preceden a las potencias de 10, dejando el 10 elevado al mismo exponente.

Ejemplos: $2 \cdot 10^{-3} + 4{,}9 \cdot 10^{-3} = (2 + 4{,}9) \cdot 10^{-3} = \mathbf{6{,}9 \cdot 10^{-3}}$

$-5 \cdot 10^{6} + 7 \cdot 10^{6} = (-5 + 7) \cdot 10^{6} = \mathbf{2 \cdot 10^{6}}$

b. **Las potencias de 10 son distintas**

Si son distintas no podemos sumar ni restar directamente, sino que antes tenemos que **conseguir que sean iguales.** Actuaremos de la siguiente forma.

Supongamos que tenemos que realizar la siguiente operación:

$\mathbf{4{,}2 \cdot 10^{4} - 3{,}1 \cdot 10^{3}}$

1) Reducimos a la potencia de 10 de menor exponente (para ello podemos descomponer en producto la potencia de exponente mayor).
   $4{,}2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{3} - 3{,}1 \cdot 10^{3} = 42 \cdot 10^{3} - 3{,}1 \cdot 10^{3}$

2) Sumamos o restamos los números que van delante de las potencias de 10 $(42 - 3{,}1) \cdot 10^{3} = 38{,}9 \cdot 10^{3}$

3) Finalmente, escribimos el resultado correctamente en notación científica
   $38{,}9 \cdot 10^{3} = \mathbf{3{,}89 \cdot 10^{4}}$

Si los exponentes fueran negativos, el procedimiento es el mismo. Veamos un ejemplo:

$\mathbf{-6{,}1 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{-2}}$

1) $-6{,}1 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-3} = -6{,}1 \cdot 10^{-3} - 70 \cdot 10^{-3}$
2) $(-6{,}1 - 70) \cdot 10^{-3} = -76{,}1 \cdot 10^{-3}$
3) $-76{,}1 \cdot 10^{-3} = \mathbf{-7{,}61 \cdot 10^{-2}}$

2.4.2. Multiplicación

Para multiplicar dos números en notación científica, se multiplican los números que preceden a las potencias de 10 y se multiplican también dichas potencias (sumando los exponentes).

Ejemplos: $(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2 \cdot 10^{7}) = (4 \cdot 2) \cdot (10^{5} \cdot 10^{7}) = \mathbf{8 \cdot 10^{12}}$

$$(-2 \cdot 10^{-4}) \cdot (7 \cdot 10^{-11}) = (-2 \cdot 7) \cdot (10^{-4} \cdot 10^{-11}) = -14 \cdot 10^{-15}$$

En este último ejemplo, tenemos que "arreglar" el resultado para que esté correctamente expresado en notación científica (una sola cifra entera delante de la potencia de 10):

$-14 \cdot 10^{-15} = \mathbf{-1{,}4 \cdot 10^{-14}}$

Este último paso, habrá que realizarlo después de cualquier operación, siempre que sea necesario.

2.4.3.División

Para dividir dos números en notación científica, se dividen los números que preceden a las potencias de 10 y también dichas potencias (restando los exponentes).

Ejemplos: $(4{,}7 \cdot 10^{2}) : (9{,}4 \cdot 10^{6}) = (4{,}7 : 9{,}4) \cdot (10^{2} : 10^{6}) = 0{,}5 \cdot 10^{-4} = \mathbf{5 \cdot 10^{-5}}$

$(-1{,}8 \cdot 10^{-11}) : (-3 \cdot 10^{-16}) = (1{,}8 : 3) \cdot (10^{-11} : 10^{-16}) = 0{,}6 \cdot 10^{5} = \mathbf{6 \cdot 10^{4}}$

Como has podido ver, en el último paso de ambos ejemplos hemos tenido que "arreglar" de nuevo el resultado.

Estas operaciones también pueden realizarse en la calculadora, en clase veremos algunos ejemplos.

3. Cálculo de porcentajes. Los porcentajes en la economía

3.1. Cálculo de porcentajes

En el último mes de julio unos almacenes hicieron una rebaja del 15% sobre los precios de junio en los artículos de ropa para jóvenes. Un pantalón costaba en junio 14,40 €. ¿Qué descuento hay que aplicarle? ¿Cuál es su precio de venta en julio?

El porcentaje es un caso particular de las proporciones. Un 15% de descuento significa que de cada 100 € del precio de un artículo, el comercio descuenta 15 €. El importe del descuento es una magnitud proporcional al precio original. Por tanto, para resolver el problema hay que aplicar la siguiente regla de tres directa:

$$100 \text{ ——— } 14,4$$

$$15 \text{ ——— } x$$

Haciendo los cálculos $x = \dfrac{15 . 14,40}{100} = 2,16$, con lo que la tienda ha realizado un descuento de 2,16 €. Como consecuencia nosotros tendremos que pagar

$$14,40 - 2'16 = 12,24$$

El cálculo de porcentajes es quizás el ejemplo de función de proporcionalidad directa que con más frecuencia usamos en la vida cotidiana.

La **razón de proporcionalidad** en los problemas de porcentaje es un cociente cuyo denominador vale siempre 100. Así, en nuestro ejemplo, la razón es de $\dfrac{15}{100} = 0,15$. El problema se puede resolver multiplicando el precio original por la razón de la proporción, es decir, el descuento será de $14,40 . 0,15 = 2,16$

Ejemplo:

En el campeonato escolar el equipo de fútbol del colegio jugó 40 partidos de los que ganó 25, empató 10 y perdió 5 partidos. ¿Qué porcentaje representan los partidos ganados, empatados y perdidos?

El problema es muy similar a los anteriores. La regla de tres hay que plantearla ahora de la siguiente manera para calcular el porcentaje de partidos ganados:

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{———} & 40 \\ x & \text{———} & 25 \end{array}$$

Calculando el valor de $x = \frac{100 . 25}{40} = 62,5$, con lo que el porcentaje de partidos ganados es de un 62,5 %.

Para calcular el porcentaje de partidos empatados usamos la misma regla de tres pero con los números cambiados y obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{———} & 40 \\ x & \text{———} & 10 \end{array} \quad ® \quad x = \frac{100 . 10}{40} = 25$$

Luego el porcentaje de partidos empatados es de un 25 %.

Por último para calcular el porcentaje de partidos perdidos lo que hacemos es lo siguiente:

$100 - 62,5 - 25 = 12,5$

Por tanto el porcentaje de partidos perdidos es de un 12’5 %.

EJERCICIO

3.2. Aumentos y disminuciones porcentuales

Aumentos porcentuales

Un libro costaba hace dos meses 18 €, si su precio ha aumentado un 12 %, ¿cuánto cuesta ahora?

Si usamos una regla de tres para calcular en primer lugar el aumento en el precio

$$\begin{array}{ccc} 100 & \text{———} & 18 \\ 12 & \text{———} & x \end{array} \quad ® \quad x = \frac{12 . 18}{100} = 2,16$$

En consecuencia, el precio del libro a aumentado en 2,16 €, luego ahora cuesta $18 + 2,16 = 20,16$ €.

También podíamos haberlo calculado directamente haciendo las siguientes operaciones:

$18 . (1 + 0,12) = 18 . 1'12 = 20,16$

Disminuciones porcentuales

EJERCICIO:

Un traje valía 252 €, y se rebaja un 25 %, ¿Cuánto vale ahora?

a. 190 €
b. 53 €
c. 189 €
d. 52,5 €

El ejercicio anterior también se puede resolver con las siguientes operaciones:

$$252\,.\left(1-0{,}25\right)=252\,.0{,}75=189$$

Es el mismo proceso que el anterior para aumentos salvo porque aquí como lo que tenemos es una rebaja (disminución) lo que tenemos que hacer es restar.

Como hemos visto en las preguntas anteriores cuando nos hacen rebajas sobre precios rebajados tenemos que tener cuidado con lo que pensamos que nos están cobrando.

Veamos como se calcula una rebaja tras otra rebaja:

Estamos en una tienda en la que nos encontramos con el cartel "remate final: 20 % de descuento sobre lo ya rebajado". Queremos comprarnos unos pantalones que inicialmente costaban 58 €; se les hizo una rebaja de un 15 %. ¿Cuál es el precio que tengo que pagar?

Lo que tenemos que hacer a la hora de calcularlo es hacer dos reglas de tres o dos procesos un poco más rápidos ya que son disminuciones porcentuales:

$$58\,.\left(1-0{,}15\right)=58\,.0{,}85=49{,}3$$
$$49{,}3\,.\left(1-0{,}20\right)=49{,}3\,.0{,}80=39{,}44$$

Con lo que al final pagaremos 39'44 €.

EJERCICIO:

¿Cuál ha sido el porcentaje de rebaja que le hemos aplicado realmente a los pantalones?

a. 35 %
b. 33 %
c. 34 %
d. 32 %

3.3. Los porcentajes en la economía

El impuesto sobre el valor añadido (IVA)

Al realizar cualquier compra, el proveedor añade al precio del objeto que compras un impuesto llamado impuesto del valor añadido (o simplemente IVA) que posteriormente entrega a Hacienda. El valor de ese impuesto es un porcentaje del importe de la compra. Dependiendo de lo que adquieras, el porcentaje a aplicar es distinto. Por ejemplo, si compras un televisor o un juego para el ordenador, debes aplicar un 16% del importe de la compra; si compras un libro, el tipo que se aplica es del 7%.

Veamos un caso concreto: si compras un ordenador cuyo precio de catálogo es de 720 €, para calcular el importe del IVA debes aplicar un tipo del 16%. Por tanto, el importe del impuesto será de

$$720 \,.\, \frac{16}{100} = 115{,}20$$

que, sumándolo al precio de catálogo, resulta un precio final de 835,20 €.
a cantidad resultante del impuesto se añade a su precio y se obtiene así el precio de compra.

El interés simple

Las entidades financieras (bancos, cajas de ahorro) dan a sus clientes una cantidad de dinero anual que es proporcional al dinero que tienen guardado o depositado en ellas. Esta cantidad de dinero se llama **interés** y se mide en tanto por ciento.

Veamos un ejemplo:

Isabel tiene ahorrados 3.000,00 € en la caja de ahorros del barrio, que le da un 2,5% anual por este dinero. ¿Qué interés le produce su capital al final de año? ¿Y en 3 años?

Que el tipo de interés sea del 2,5% significa que de cada 100 € que Isabel tiene en la caja de ahorros, ésta le da 2,50 € al año. Por los 3.000 € le dará el 2,5%, esto es:

$$3000 \cdot \frac{2,5}{100} = 75,00$$

Le gana al año 75 €.

En tres años le producirá 3 veces esa cantidad, es decir,

$$3000 \cdot \frac{2,5}{100} \cdot 3 = 225,00$$

En general, si ***c*** es el **capital** depositado, ***r*** el tipo de interés (llamado también **rédito**) y ***t*** el número de años, el importe del interés ***i*** que produce viene dado por la fórmula:

$$i = \frac{c\ r\ t}{100}$$

El índice de precios al consumo (IPC)

El IPC es un índice que refleja cada mes la variación (aumento o, a veces, disminución) que sufren los precios de los productos que consumimos en España. Este índice se mide en tanto por ciento. Así, cuando en torno al día 10 de este mes los periódicos publicaron que el IPC había subido dos décimas (0,2%) significa que el nivel de precios ha aumentado ese porcentaje respecto del mes anterior.

Esto no quiere decir que cualquier producto de consumo (alimentos, gasolina, electricidad, vivienda) haya subido ese porcentaje. El IPC se obtiene como una media de la variación de los precios en el mes anterior.

El IPC es un índice muy importante, pues suele utilizarse como base para los incrementos de los sueldos de los trabajadores cada año.

4. Algunas facturas de andar por casa

4.1. La hipoteca

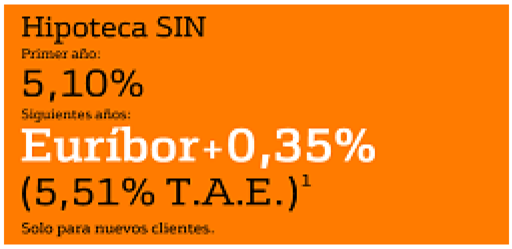
El Tipo de Interés es el precio que nos cobra el banco por darnos un préstamo

En nuestro caso hemos decidido pedir al banco 280.000 €. Esta cantidad es lo que se llama capital. El interés se calcula aplicando un porcentaje sobre el capital pendiente de devolución en cada momento.

Las entidades (bancos o cajas de ahorro) nos ofrecen dos modalidades de préstamos hipotecarios en función del tipo de interés:

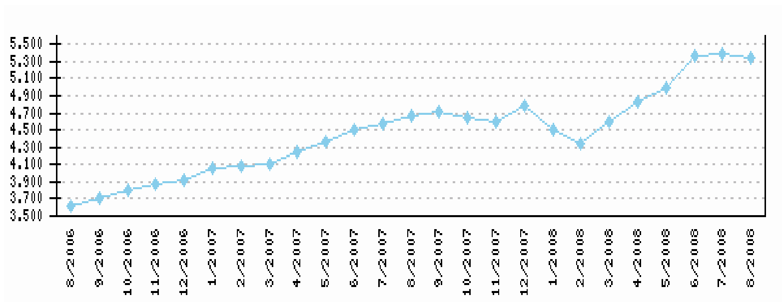
a. **Préstamos a interés fijo**: Este tipo de préstamos mantienen de forma constante el tipo de interés que nos aplican a lo largo de toda la vida del préstamo, por lo que la cuota mensual que hemos de atender se mantendrá invariable.

b. **Préstamos a interés variable**: Es aquel préstamo en el que el tipo de interés que nos aplican va cambiando en el tiempo. Esta variación depende de unos valores de referencia o índices que hace públicos el Banco de España. El índice más usado actualmente es el Euribor. El interés se revisa en un periodo previamente acordado (habitualmente de forma anual o semestral).



En este caso el interés que nos ofrecen es el *Euribor* -que en abril de 2008 fue del 4,82%- *más el 0,22%*. Es decir pagaríamos un interés del 5,02% ....DE MOMENTO, porque en cada revisión nos cambiarían para todo un año el interés.

Para que te hagas una idea de cómo ha variado el Euribor los últimos años observa con atención la siguiente gráfica:



Es decir que esta misma oferta en abril de 2007 en el que el Euribor estaba a 4,253% habría supuesto un interés de:

4,253% + 0,22% = **4,473 %**

Esto es muy importante tenerlo en cuenta cuando se pide un préstamo porque, aunque después de echar cuentas hayamos calculado que en este momento podemos pagarlo, puede ser que en años venideros, con el aumento del Euribor, no podamos.

¿Quieres saber cuánto le ha aumentado a Jesús su hipoteca este último año con la subida del Euribor?

Jesús pidió 280.000€ de préstamo. El año pasado pagaba 1.300 €/mes y después de la revisión paga ¡¡¡**1. 448 €/mes** !!!

¿Qué es el Euribor?

El Euribor es el tipo de interés al que se prestan entre sí las entidades financieras en el mercado interbancario. Así el Euribor de julio de 2008 (5,393 %) sería el tipo medio (media aritmética) al que se han prestado los bancos y cajas en el mercado interbancario a lo largo del mes de julio.

Ten en cuenta que aunque el Euribor es uno de los indicadores más usados, no es el único, también existen otros indicadores y es muy importante conocer cuál nos están aplicando porque sus valores son bien distintos.

La **T.A.E. (Tasa Anual Equivalente**) es un indicador que, en forma de tanto por ciento anual, expresa el coste efectivo de un préstamo, incluyendo no sólo el coste que se deriva de la obligación de pago de los intereses, sino también el coste que se deriva del pago de las comisiones y otros gastos bancarios a que se nos obligue en la contratación del préstamo.

La TAE nos permite comparar distintas ofertas con muy diferentes condiciones particulares, esto es con tipos de interés y comisiones bancarias diferentes.

A menor T.A.E. menor coste del préstamo

5. Ejercicios.

1. ¿Son ciertos los siguientes enunciados? (Pon V o F)

1. El número 56 se coloca en la recta numérica más a la derecha que el número 65. ( )
2. 8>6>5 ( )
3. Existen dos números naturales distintos que tiene la misma representación en la recta numérica. ( )
4. Podemos representar números naturales a la izquierda del cero. ( )
5. Los números naturales tienen fin. ( )

2. Completa los huecos con los números naturales que creas convenientes.

1. 3>___>1> ___
2. 8<___<10
3. 34<___<___<37

3. Realiza las siguientes operaciones y escribe el resultado:

1. $5+6.2=$
2. $8+21:3=$
3. $3+(17-5)=$
4. $(3+5-2).3=$
5. $5+(7-5).3-4+(15-12:4)=$
6. $(3+7.2)-2.(24:3+2)-8\ =$

4. Di si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados: (Pon V o F)

1. La gran diferencia entre los números naturales y los números enteros es que estos últimos tienen inverso. ( )
2. $|-43|=43$ ( )
3. -7>-4 ( )
4. $|9|=-9$ ( )
5. El número -9 se coloca en la recta numérica más a la derecha que el -6.( )
6. El número 6 esta situado más a la izquierda que el número -89. ( )

5. Completa los huecos.

1. -7 es el _________de 7.
2. El valor absoluto de -9 es ___
3. 1>___>-1
4. -1234<_______<_______<-1231
5. El opuesto de -18 es ___.

6. Realiza las siguientes operaciones sin usar la calculadora:

1. $4-3.(15-8)=$
2. $3+2.5=$
3. $|-5|=$
4. $-4+5.(-3)-6.4=$
5. $4.(-3)-4.6-10+3.(-2)=$
6. $3-2.[5-(1-3)]=$
7. $7-5+2.[4-(-1-4)+3.(2-5)]-3=$

7. Indica el conjunto o los conjuntos a los que pertenecen los siguientes números:

	N	Z	Q	I	R
-7					
$\sqrt{12}$					
$\frac{5}{4}$					
Π					
20.362					
$\frac{168}{2}$					
$\sqrt{5}$					
-69					
17					
$\frac{25}{15}$					

8. En una clase de 30 alumno, el 60% son chicos y el 40% chicas. ¿Cuántos chicos y chicas hay en clase?

9. En una ciudad de dos millones de habitantes el 82% son europeos; el 9% africanos; el 6% asiáticos, y el resto, americanos. ¿Cuántos hay en cada grupo?

10. Los habitantes de cierta ciudad se distribuyen según esta tabla:

EUROPEOS	**880.000**
AFRICANOS	**60.000**
AMERICANOS	**50.000**
ASIÁTICOS	**10.000**

¿Qué porcentaje supone cada grupo respecto del total?

11. Actualmente me dan 15 euros mensuales de paga, pero he convencido a mis padres para que me suban el 15%. ¿Cuál será mi paga a partir de ahora?

12. Un CD de música cuesta 11,35 euros. ¿Cuánto pagaré se me hacen una rebaja del 40%

13. Un pantano contenía el mes pasado tres millones y medio de metros cúbicos de agua.¿Cuál es su contenido actual si con las últimas lluvias ha ganado un 20%?

14. En una granja, el 15% de los animales son vacas. Sabiendo que hay 30 vacas, ¿Cuál es el número total de animales?

15. Ayer la barra de pan subió un 10%. Si ahora cuesta 55 céntimos, ¿cuál era el precio anterior?

16. Una camiseta, rebajada en un 20%, me ha costado 40 euros. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

Un pantalón costaba 50 euros y he pagado 40 euros. ¿Qué porcentaje me han rebajado?

17. Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones: (Pon V o F)

1. El intervalo $(3,5)$ está formado por todos lo números entre el 3 y 5 ambos inclusive. ( )
2. $[-4,-9)$ es un intervalo. ( )
3. En el intervalo $[-2,3)$ están todos los números desde el -2 al 3 incluyendo el -2 y excluyendo el 3. ( )
4. Los números que forma un intervalo los puedo contar. ( )
5. En el intervalo $[3,6]$, los extremos pertenecen a él. ( )

18. Si en unos almacenes nos hacen un descuento del 15% en cada prenda,

¿Qué descuento nos harán en unos pantalones que cuestan 9 € sin rebajas?

19. Si en unos almacenes nos hacen un descuento del 15% en cada prenda,

¿Cuánto tendremos que pagar por una camisa que costaba sin rebajas 19,20 €?

20. Si en unos almacenes nos hacen un descuento del 15% en cada prenda,

¿Cuáles la cantidad que pagaríamos si queremos comprar un traje y una chaqueta que cuestan respectivamente 85 € y 39 € antes de las rebajas?

a. 106,4 €
b. 107 €
c. 105,4 €
d. 18,6 €

21. Calcula el 80 % de 500

e. 400
f. 100
g. 412

h. 110

22. Calcula el 20 % de 5 millones

q. 1 millón y medio
r. 4 millones
s. 1 millón
t. 3 millones y medio

23. En una clase hay 30 alumnos. Los aprobados en la evaluación anterior han sido los siguientes:

Matemáticas: 21

Lengua: 18

Ciencias Naturales: 6

Ciencias Sociales: 24

Inglés: 27

Responde a las siguientes preguntas:

a) El porcentaje de aprobados en Matemáticas es de un: ___%
b) El porcentaje de aprobados en Lengua es de un: ___%
c) El porcentaje de aprobados en Ciencias Naturales es de un: ____%
d) El porcentaje de aprobados en Ciencias Sociales es de un: ____%
e) El porcentaje de aprobados en Inglés es de un: ___%

a) 6320 de 15800: ___%
b) 96 de 480: ___%
c) 16 de 320: ___%
d) 750 de 5000: ___%

24. Un traje valía 252 €, y se rebaja un 25 %, ¿Cuánto vale ahora?

25. La masa forestal de un bosque sufrió las siguientes variaciones a lo largo de tres décadas:

- de 1950 a 1960 aumentó un 28%
- de 1960 a 1970 disminuyó un 40%
- de 1970 a 1980 aumentó un 15%

¿Qué porcentaje aumentó o disminuyó la masa forestal de 1950 a 1980? _____

26. En un año el precio de un artículo sube un 40%, después baja un 10% y, por último, baja un 20% ¿Qué porcentaje aumentó o disminuyó el precio del artículo a lo largo del año?

_____

27. Empareja cada uno de los casos siguientes con el importe del IVA que corresponda:

a) Una bombilla sin IVA cuesta 0,75 €, el IVA es 16 % (___________€)
b) Un libro sin IVA cuesta 13,80 €, el IVA es 7 % (___________€)
c) El consumo de electricidad sin IVA es de 18,36 €, el IVA es 16 % (_______€)
d) Una barra de pan sin IVA cuesta 0,31 €, el IVA es 2 % (___________€)
e) Una pluma cuesta 7,20 € sin IVA, el IVA es 16 % (___________€)

28. Empareja cada uno de los casos siguientes con el importe total a pagar tras añadirle el IVA:

a. Si un televisor cuesta 457 € sin IVA, con un IVA del 16 % (____€)

b. La habitación de un hotel una noche cuesta 120 € sin IVA, con un IVA del 7 % (_________€)

c. El consumo de teléfono es de 64,5 €, con un IVA del 16% (___________€)

d. Un kilo de tomates sin IVA cuesta 1,16 €, con un IVA del 4% (____€)

29. Calcula el interés que producen 4200 € depositados al 6,25% de interés en 5 años.

30. Enrique coloca un capital en un banco que le da un interés del 3,75% anual. Cuando finaliza el segundo año comprueba que tiene 222 € en su cuenta.
¿Cuánto dinero había depositado al principio del período?

31. Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a. $5^3 \cdot 5^6$

b. $(4^3)^2$

c. $6^7 : 6^3$

d. $\left(\frac{1}{9}\right)^8 : \left(\frac{1}{9}\right)^5$

e. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

f. $(-2)^4 \cdot (-2)^{-5}$

32. Empareja cada operación con su resultado:

a. $-3 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} =$
b. $-2,3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} =$
c. $6 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2} =$
d. $-9,2 \cdot 10^{-4} – 3 \cdot 10^{-5} =$
e. $9 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-7} =$
f. $(-7,4 \cdot 10^{-2}) \cdot (-8 \cdot 10^{13}) =$
g. $(-3,48 \cdot 10^{-11}) : (-5,8 \cdot 10^{8}) =$
h. $(4,97 \cdot 10^{19}) : (-7 \cdot 10^{13}) =$
i. $(2,8 \cdot 10^{12}) : (4 \cdot 10^{6}) =$
j. $(-6 \cdot 10^{9}) \cdot (-6,7 \cdot 10^{-11}) =$

1. $5{,}92 \cdot 10^{12}$
2. 10^{-6}
3. $2{,}7 \cdot 10^{-4}$
4. $4{,}\ 02 \cdot 10^{-1}$
5. $3 \cdot 10^{-2}$
6. $-9{,}5 \cdot 10^{-4}$
7. $1{,}2 \cdot 10^{-6}$
8. $6 \cdot 10^{20}$
9. $-7{,}1 \cdot 10^{5}$
10. $7 \cdot 10^{5}$

33. Indica cuáles de los siguientes números están escritos correctamente en notación científica.

$4{,}85 \cdot 10^{-9}$

$23{,}54 \cdot 10^{8}$

$0{,}41 \cdot 10^{3}$

34. Escribe en notación científica los siguientes números:

a. 0,00003695
b. $36{,}987 \cdot 10^{-9}$
c. 269580000
d. $2{,}3695 \cdot 10^{5}$

35. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica:

e. $3{,}24 \cdot 10^{5} + 2{,}369 \cdot 10^{3} - 5{,}87 \cdot 10^{7} =$
f. $2{,}65 \cdot 10^{6} - 9{,}698 \cdot 10^{9} + 3{,}17 \cdot 10^{7} =$
g. $2{,}65 \cdot 10^{-6} - 2{,}36 \cdot 10^{-5} + 3{,}5 \cdot 10^{-7} =$
h. $2{,}36 \cdot 10^{5} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3} =$
i. $3{,}11 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-2} =$
j. $1{,}1076 \cdot 10^{6} : 2{,}13 \cdot 10^{7} =$
k. $1{,}3708 \cdot 10^{9} : 2{,}3 \cdot 10^{-3} =$