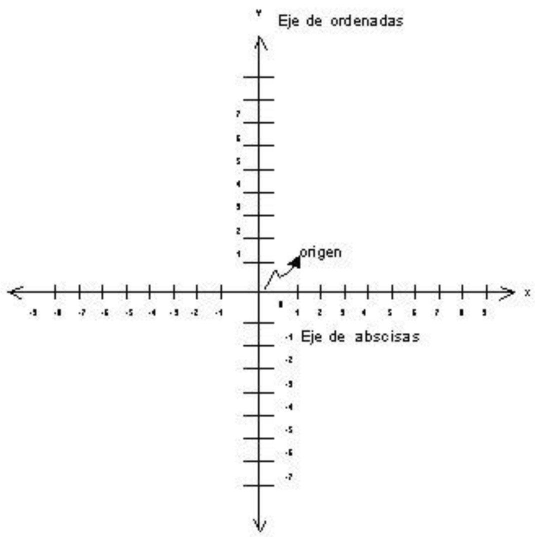
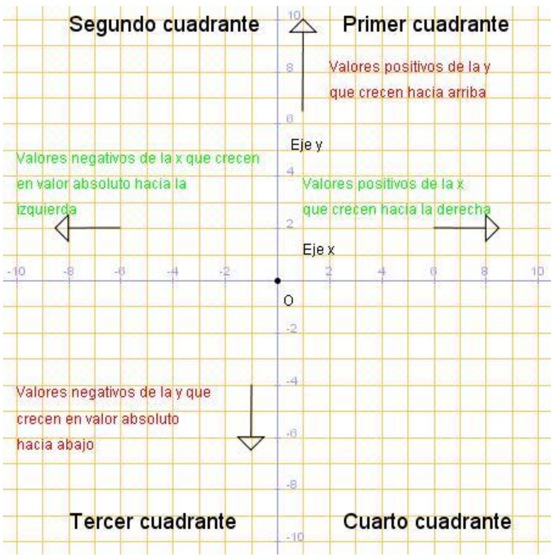
Bloque 2. Geometría

2. Vectores

1. El plano como conjunto de puntos. Ejes de coordenadas

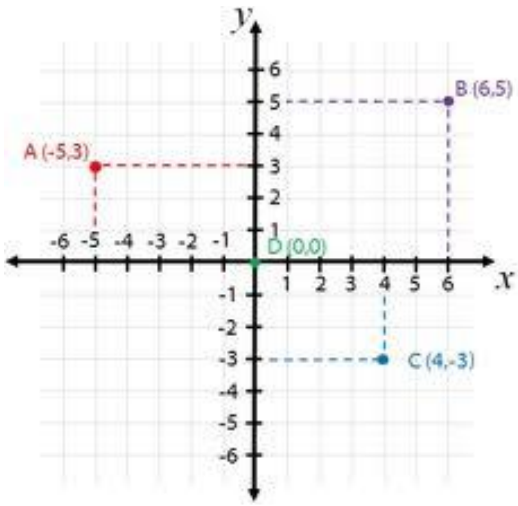
Para representar puntos en un plano (superficie de dos dimensiones) utilizamos dos rectas graduadas y perpendiculares, cuyo corte es el punto 0 de ambas u origen de coordenadas. A la recta horizontal se le denomina eje de abcisas o eje OX, mientras que a la vertical se le denomina eje de ordenadas o eje OY.





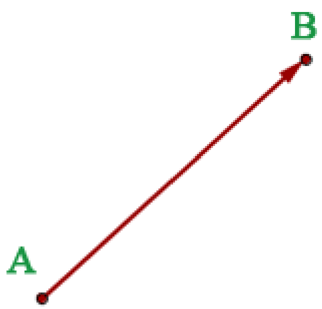
2. Coordenadas en un punto

Cada punto del plano tiene asociado un par de números reales, que corresponden con la posición correspondiente con respecto al eje X y la posición correspondiente con respecto al eje Y de ese punto. Los puntos se suelen nombrar con una letra mayúscula, seguida de sus coordenadas X e Y, por este orden, entre paréntesis y separadas por una coma.



3. Definición de vector fijo

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un **segmento orientado** que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

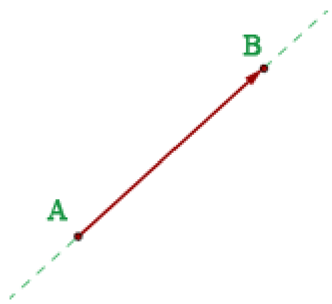


4. Elementos de un vector

- **<u>Dirección de un vector</u>**: La dirección del vector es la dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.

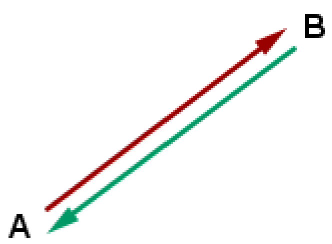
- **<u>Sentido de un vector</u>**: El sentido del vector $\overrightarrow{AB}$ es el que va desde el origen A al extremo B**.**

- **<u>Módulo de un vector</u>**: El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la **l**ongitud del segmento AB, se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.



El **módulo** de un **vector** es un número siempre **positivo** o **cero**.

Si un vector tiene la misma dirección y módulo que otro, pero distinto sentido, diremos que son **<u>vectores opuestos.</u>**



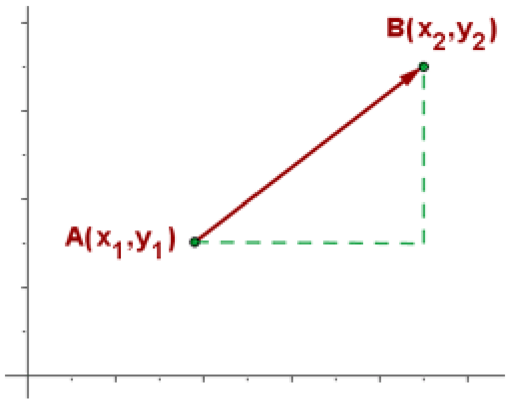
5. Componentes o coordenadas de un vector

Si las coordenadas de los puntos extremos, A y B, son :

$$A(x_1, y_1) \qquad B(x_2, y_2)$$

entonces las **coordenadas o componentes del vector** $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

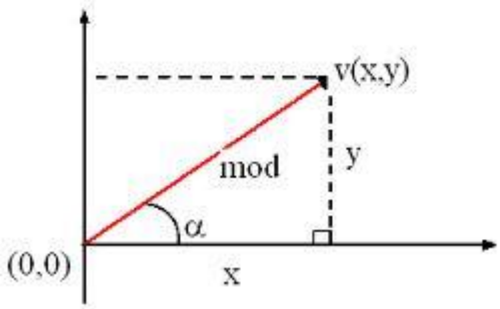


A(2, 2) B(5, 7)

$$\overrightarrow{AB} = (5-2,\ 7-2) \qquad \overrightarrow{AB} = (3,\ 5)$$

6. Cálculo del módulo de un vector a partir de sus componentes

Se calcula como el valor absoluto de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes. Esta fórmula es una aplicación más del Teorema de Pitágoras, ya que la componente x sería un cateto, la componente y sería otro cateto, y el módulo del vector la hipotenusa del triángulo rectángulo que formarían.



$$\vec{u} = (u_1,\ u_2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\vec{u} = (3,\ 4) \qquad |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

IMPORTANTE: El módulo va a ser la distancia entre los dos puntos que une el vector.

7. Módulo a partir de las coordenadas de los puntos

Dado que las coordenadas se calculan restando los puntos, tenemos que el módulo se calcularía así:

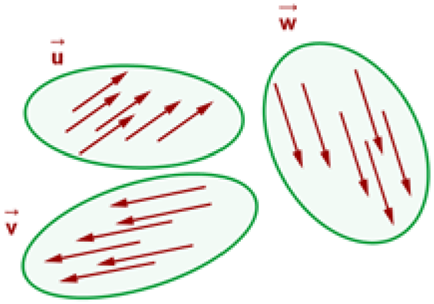
$$A(x_1, y_1) \qquad\qquad B(x_2, y_2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

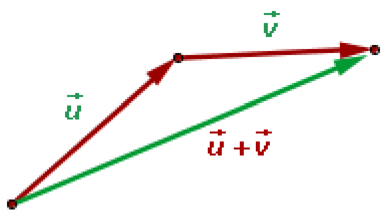
$$A(2,\ 1) \qquad B(-3,\ 2) \qquad\qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{26}$$

8. Vectores libres

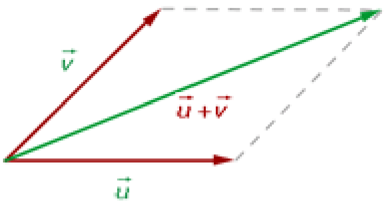
El conjunto de todos los **vectores equipolentes** entre sí se llama **vector libre**. Es decir los **vectores libres** tienen el mismo **módulo**, **dirección** y **sentido**.



9. Suma de vectores



Para sumar gráficamente dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.

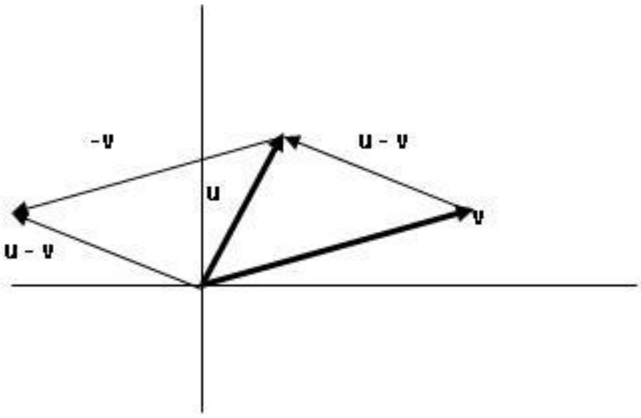


Otra opción es la **regla del paralelogramo**: Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

En cuanto a las componentes, para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$$\vec{u} = (u_1,\ u_2) \qquad\qquad \vec{v} = (v_1,\ v_2) \qquad\qquad \vec{u}+\vec{v} = (u_1 + v_1,\ \ u_2 + v_2)$$

10. Resta de vectores



Para restar gráficamente dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se suma $\vec{u}$ con el opuesto de $\vec{v}$.

Las componentes del vector resta se obtienen restando las componentes de los vectores.

$$\vec{u} = (u_1,\ u_2) \qquad \vec{v} = (v_1,\ v_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2)$$

<u>Ejemplo de suma y resta:</u>

$$\vec{u} = (-2,\ 5) \qquad \vec{v} = (3,\ -1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (-2+3,\ 5-1) = (1,\ 4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-2-3,\ 5-(-1)) = (-5,\ 6)$$

11. Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector:

- De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.
- Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo**.
- De **sentido contrario** al vector $\vec{u}$ **si k es negativo**.
- De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$ (valor absoluto de k por el módulo del vector)

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$k \cdot (u_1, u_2) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Ejemplo:

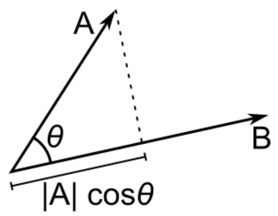
$$\vec{u} = (-2, 5) \qquad \vec{v} = (3, -1)$$

$$-\vec{u} = (2, -5)$$

$$3 \cdot \vec{v} = (9, -3)$$

12. Producto escalar

El **producto escalar de dos vectores** es un número real que resulta al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**.**



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5) \qquad \widehat{uv} = 45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$$

13. Expresión analítica del producto escalar

Si conocemos las componentes de los vectores, el producto escalar puede calcularse como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3,\ 0) \qquad \vec{v} = (5,\ 5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$$

14. Aplicaciones del producto escalar

Si combinamos las dos expresiones del producto escalar, podemos obtener el ángulo que forman dos vectores a partir de sus componentes, utilizando la siguiente fórmula (llamada expresión analítica del ángulo de dos vectores):

$$\cos \alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \cdot \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}}$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,\ 0) \qquad \vec{v} = (5,\ 5)$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Ejercicios de vectores

1. Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de componentes (5, −2). Hallar las coordenadas de A si se conoce el extremo B(12, −3).

2. Dado el vector $\vec{u}$ = (2, -1), determinar dos vectores equipolentes (mismo módulo, dirección y sentido) a $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, sabiendo que A(1, -3) y D(2, 0).

3. Calcular la distancia entre los puntos:

$$A(2,\ 1) \qquad B(-3,\ 2)$$

4. Halla las componentes del vector que tiene como origen A(2,1) y extremo B(5,7)

5. Calcula x e y para que sean iguales los vectores u = (x,5) y v = (6,y)

6. Halla el módulo de los vectores:

a) u = (1,2)   b) v = (2, $4\sqrt{2}$)   c) w = (0, 7)

6. Siendo los vectores u = (2,-1) y v = (5,3), halla el resultado de:

a) u + v   b) u-v   c) 2u   d) 3u- 2v

7. Siendo los vectores u = (2,-3), v = (3,4) y w = (1,4) calcula el valor de:

a) u · v   b) v · w   c) u · (2w – 3v)

8. Calcula u · v siendo u = (2,-3) y v = (6,4). ¿Qué ángulo forman?

9. Si u = (2,-3) y v = (x, 4), calcula qué valor ha de tomar x para que el producto escalar de ambos sea 4. ¿Y para que sea 0?

10. Dados los vectores u = (x,3), v = (8,-y), calcula x e y sabiendo que son perpendiculares y que el módulo de u es $\sqrt{45}$